

Juan Antonio Cuéllar Carvajal

MATE MÁTICA CAS

4

Quinta edición

Mc
Graw
Hill

Matemáticas 4

5a. edición

Juan Antonio Cuéllar Carvajal

RECURSOS

Solucionario



CONTENIDO

1. Relaciones y funciones
2. Funciones polinomiales
3. Funciones racionales
4. Funciones trascendentes

ISBN

978-607-15-1433-2

DESCRIPCIÓN

La quinta edición de este libro se apega a los más recientes planes de estudio de la DGB y, por tanto, se sustenta en el enfoque de desarrollo de competencias y el trabajo de temas transversales. Sin embargo, aunque se conserva el enfoque de máximo aprovechamiento característico del autor, además de que se añadieron nuevos problemas y se mejoró la parte gráfica de este texto dedicado al estudio de las funciones (precálculo), se han hecho modificaciones sustanciales para ayudar a que el estudiante logre mayores aprendizajes.

Estructuralmente, ahora la obra se compone de dos secciones: la primera, la parte teórica del libro, tiene la intención de que se use como práctica guiada por el profesor, en tanto que la segunda, que corresponde a la parte práctica (actividades), tiene el propósito de que el alumno aprenda con mayor autonomía y de forma colaborativa.

Funciones racionales

3

Situación didáctica

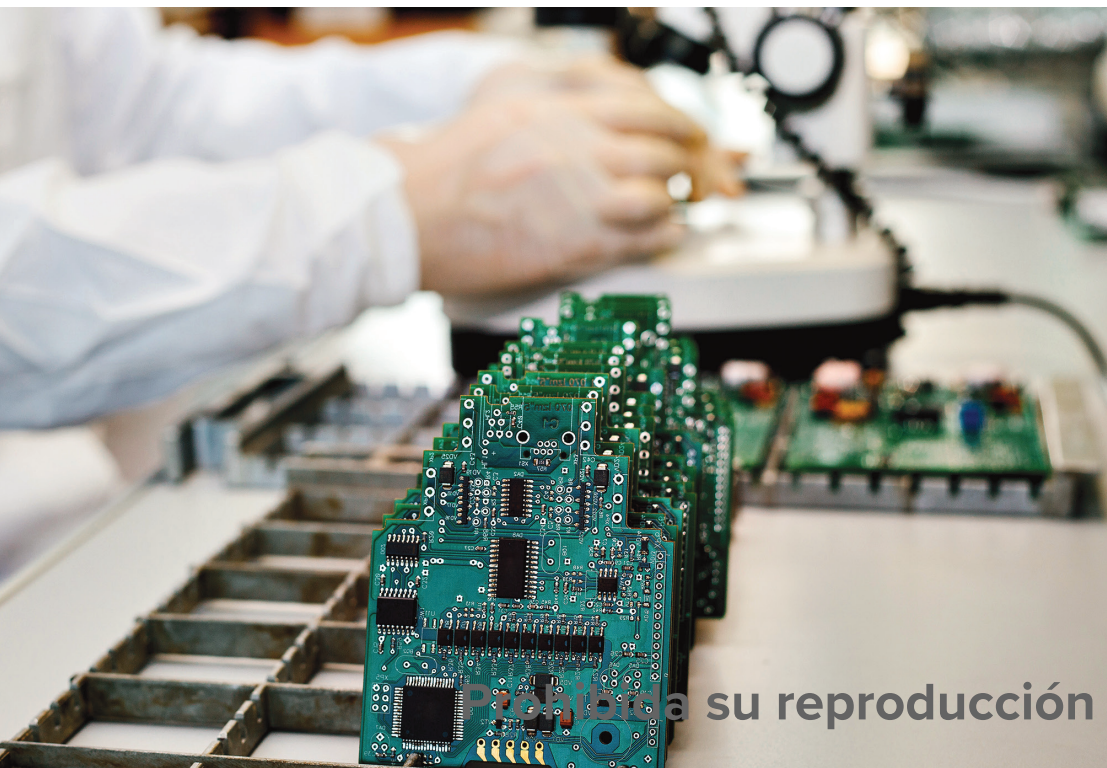
Según los registros de una compañía que produce microchips, el promedio de n componentes diarios que un empleado puede ensamblar después de t días de capacitación está determinado por la función:

$$n(t) = \frac{60t}{t+1}$$

Con los conocimientos que adquieras en este bloque aprenderás, entre otras cosas, a determinar el número máximo de microchips que un empleado puede armar después de muchos días de capacitación.

CGA: 4.1, 7.3, 8.2

CDBE: 3, 4, 5



© Shutterstock/franz12

Propósito del bloque:

Utiliza funciones racionales para modelar diferentes fenómenos, favoreciendo un pensamiento crítico ante las acciones humanas de impacto en su entorno.

Capítulo muestra

Interdisciplinaridad

Biología II.

Física II.

Competencias genéricas y sus atributos (CGA)	Competencias disciplinares básicas extendidas (CDBE)
CGA 4.1. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. CGA 7.3. Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana. CGA 8.2. Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. 5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento. 6. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Articulación de competencias para el logro de los aprendizajes esperados en este bloque

Eje	Componentes	Contenido central
Pensamiento y lenguaje variacional	Cambio y predicción: elementos del cálculo	- Reconocimiento de las características de las funciones racionales - Análisis de las funciones racionales y determinación de las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas
Contenidos específicos		
Conocimientos	Habilidades	Actitudes
Función racional - Modelo algebraico general de una función racional - Modelo gráfico - Asíntotas - Aproximación informal a los límites	- Analiza funciones racionales considerando sus características. - Calcula las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de una función racional. - Selecciona modelos de funciones racionales.	- Privilegia el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos. - Afronta retos asumiendo la frustración como parte de un proceso. - Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado. - Externa un pensamiento crítico y reflexivo de manera solidaria.
Aprendizajes esperados		
- Construye la gráfica y el modelo de funciones racionales, de manera colaborativa, representando fenómenos sociales o naturales de su contexto. - Emplea modelos de funciones racionales favoreciendo el pensamiento crítico, para realizar predicciones e interpretaciones de situaciones presentes en su entorno.		

Prohibida su reproducción

Evaluación de diagnóstico

I. Factoriza las expresiones algebraicas siguientes.

1. $x^2 - 16$

2. $x^2 + 4x - 12$

3. $x^2 - 6x + 9$

4. $x^2 - 4x + 4$

5. $x^2 - x$

II. Simplifica las fracciones algebraicas siguientes.

6. $\frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + 3x - 4}$

7. $\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 16}$

8. $\frac{6x + 18}{x^2 - 9}$

9. $\frac{4x + 20}{x^2 + 10x + 25}$

III. Determina para qué valores de x las funciones siguientes no están definidas.

10. $f(x) = \frac{6}{x}$

11. $f(x) = \frac{2x - 7}{x(x + 4)}$

12. $f(x) = \frac{x + 6}{x^2 - 25}$

13. $f(x) = \frac{x - 6}{x^2 - 9x + 20}$

IV. Resuelve los ejercicios.

14. Dada $f(x) = \frac{1}{x}$, ¿a qué valor tiende $f(x)$ cuando x crece sin límite; es decir, si $x \rightarrow \infty$, entonces $f(x) \rightarrow ?$

15. Dada $f(x) = \frac{1}{x}$, ¿a qué valor tiende $f(x)$ cuando x decrece sin límite; es decir, si $x \rightarrow -\infty$, entonces $f(x) \rightarrow ?$

V. Efectúa la siguiente operación. Utiliza la división larga.

16. $\frac{2x^2 + 3x - 1}{x + 4}$

Introducción a las funciones racionales

Una función racional es la que se expresa de esta forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, y $Q(x)$ es diferente de cero (recuerda que la división entre cero no está definida). Los siguientes son ejemplos de funciones racionales.

$$f(x) = \frac{3x - 5}{x^2 - 8}$$

$$f(x) = \frac{6}{x}$$

$$f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 7x + 12}$$

Como puedes deducir, el dominio de definición de una función racional es el conjunto de los números reales, $\mathbf{R}$, excepto los que anulan su denominador.

Identificación del dominio de funciones racionales

Ejemplo 1

Determina el dominio de las funciones racionales indicadas en cada inciso.

a $f(x) = \frac{6}{x}$

Solución El dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales excepto cero, ya que la división entre cero no está definida. Entonces:

$$\text{Dom } f(x) = \mathbf{R} - \{0\}$$

b $f(x) = \frac{2x+9}{3x+12}$

Solución Si $x = -4$, entonces $3x + 12 = 0$; por tanto, el dominio de la función es el conjunto de los números reales excepto $x = -4$, que es el único valor que anula el denominador, es decir:

$$\text{Dom } f(x) = \mathbf{R} - \{-4\}$$

En los casos anteriores, resulta evidente hasta cierto punto cuál es el dominio de cada función. Veamos algunos ejemplos en los que es un tanto más complicado establecerlo.

Ejemplo 2

Identificación del dominio de funciones racionales

Determina el dominio de las funciones racionales indicadas en cada inciso.

a $f(x) = \frac{x}{x^2 - 16}$

Solución Para encontrar el dominio de la función, primero debemos factorizar el polinomio del denominador.

$$f(x) = \frac{x}{(x-4)(x+4)}$$

Entonces, el denominador se anula si y solo si $x = 4$ o $x = -4$; por consiguiente, el dominio de la función es el conjunto de todos los números reales excepto 4 y -4, es decir:

$$\text{Dom } f(x) = \mathbf{R} - \{-4, 4\}$$

b $f(x) = \frac{5x^2 - 7x + 6}{x^2 + 3x}$

Solución Al factorizar la expresión del denominador resulta:

$$f(x) = \frac{5x^2 - 7x + 6}{x(x+3)}$$

donde se advierte que los valores $x = 0$ y $x = -3$, ningún otro, anulan el denominador; por tanto, el dominio de esta función es el conjunto de los números reales excepto 0 y -3, o sea:

$$\text{Dom } f(x) = \mathbf{R} - \{0, -3\}$$

c $f(x) = \frac{3x-5}{x^2 + 4x - 12}$

Solución Al factorizar el denominador resulta:

$$f(x) = \frac{3x-5}{(x+6)(x-2)}$$

por tanto, el dominio es el conjunto de los números reales excepto -6 y 2, esto es:

$$\text{Dom } f(x) = \mathbf{R} - \{-6, 2\}$$

El siguiente es un ejemplo completamente distinto de los anteriores, por lo que es recomendable que prestes especial atención.

Identificación del dominio de funciones racionales

Ejemplo 3

Determina el dominio de la función racional siguiente.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5}$$

Solución En este caso se observa que ningún valor de x anula el denominador, pues si $x = 0$, entonces $x^2 + 5 = 0^2 + 5 = 5$; para cualquier otro valor que tome dicha variable se tiene que $x^2 > 0$; por tanto, el dominio de esta función es todo el conjunto de los números reales, esto es:

$$\text{Dom } f(x) = \{\mathbf{R}\}.$$

Asíntotas de la gráfica de una función racional

Al trazar la gráfica de una función racional es importante responder a las preguntas siguientes:

1. ¿Qué pasa con los valores de la función cuando x es *casi* igual a cero en el denominador?
2. ¿Qué pasa con los valores cuando x es grande positiva o es grande negativa?

Empecemos por responder a la primera pregunta. Según veremos, si $x = a$ en el denominador de la función racional equivale a cero, con frecuencia se presenta alguna de las tendencias representadas por la notación mostrada en la tabla 1, en la que se presenta también la representación gráfica correspondiente.

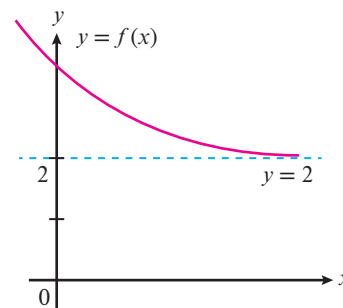
La recta $x = a$ que se observa en cada una de las figuras en la columna derecha de la tabla 1 recibe el nombre de *asíntota vertical*. Así, la respuesta a la pregunta 1 que nos hemos planteado es que, si $x = a$ es cero en el denominador de una función racional, la gráfica puede tener una asíntota vertical $x = a$. Pero hay funciones racionales en las que este no es el caso. Veremos más adelante que, cuando el numerador y el denominador de una función racional no tienen factor común, entonces la función debe tener al menos una asíntota vertical.

Consideremos a continuación la segunda pregunta. La gráfica de una función racional puede parecerse a las que se muestran en la figura 1. Las rectas trazadas con líneas discontinuas (en la primera, $y = 2$; en la segunda, $y = a$ y $y = b$) se llaman *asíntotas horizontales de la función racional $f(x)$* .

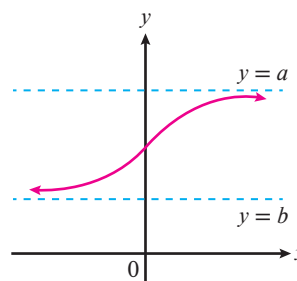
Así, la respuesta a la segunda pregunta es que el valor de $f(x)$ puede ser muy cercano a algún número c cuando x es grande positiva o grande negativa; esto es, la gráfica puede tener una asíntota horizontal $y = c$. Es importante precisar que hay funciones racionales que no tienen asíntotas horizontales, como lo estudiaremos más adelante.

Asíntotas verticales y horizontales

Veamos cómo determinar la ecuación de las asíntotas, si las hay, cuando se conoce la expresión de una función racional y la definición de su dominio.



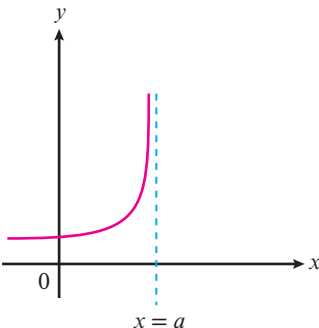
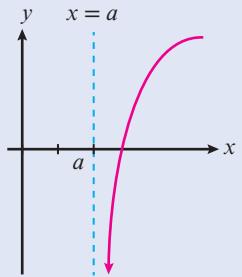
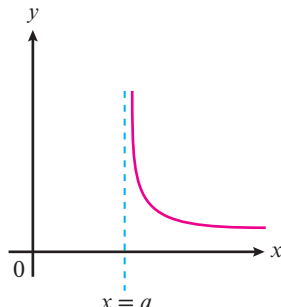
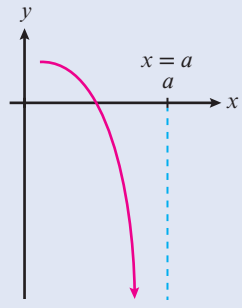
a



b

Figura 1. Gráficas de una función racional; las rectas trazadas con línea discontinua son sus asíntotas horizontales. En la figura a, la asíntota horizontal es $y = 2$; en la b es $y = a$ y $y = b$.

Tabla 1. Asintotas de la gráfica de una función racional.

Situación	Notación	Gráfica
El valor de $f(x)$ crece sin límite cuando el valor de x se aproxima a a por la izquierda (valores de x menores que a , $x < a$)	Si $x \rightarrow a^- \Rightarrow f(x) + \infty$	
El valor de $f(x)$ decrece sin límite cuando el valor de x se acerca a a por la derecha (valores de x mayores que a , $x > a$)	Si $x \rightarrow a^+ \Rightarrow f(x) - \infty$	 $f(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow a^+$
El valor de $f(x)$ crece sin límite cuando el valor de x se aproxima a a por la derecha	$f(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow a^+$	
El valor de $f(x)$ decrece sin límite cuando el valor de x se acerca a a por la izquierda	$f(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow a^-$	

Nota: Recuerda que los símbolos $+\infty$ (más infinito) y $-\infty$ (menos infinito) no representan números reales, sino cierto comportamiento o tendencia de una variable.

Asíntota vertical de una función racional

Dada la función $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, sabemos que $Q(x)$ debe ser distinto de cero. Si $x = x_0$ es un número real tal que $Q(x_0) = 0$, pero $P(x_0) \neq 0$, entonces x_0 es un *polo* de $f(x)$.

Prohibida su reproducción

Determina los polos de las funciones que se indican en cada inciso.

a $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+1)}$

Solución Esta función tiene dos polos, ya que $Q(x)$ es cero en $Q(2)$ y en $Q(-1)$, pero $P(x) = 1 \neq 0$, de modo que $x = 2$ y $x = -1$ son polos de $f(x)$.

b $f(x) = \frac{2x}{x-5}$

Solución Esta función tiene un polo en $x = 5$, ya que $Q(5) = 0$ y $P(5) = 2(5) \neq 0$.

Veamos qué sucede en la función $f(x)$ cuando se toman valores de x muy próximos al de un polo. Citemos por caso la función siguiente.

$$f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$$

Como puedes notar, el único polo de esta función es $x = 4$. Tomemos ahora valores de x muy próximos a $x = 4$, tanto a la izquierda como a la derecha de este número; por ejemplo, 3.9, 3.99, 3.999, 4.1, 4.01, 4.001, y evaluemos la función en ellos para ver qué sucede.

$$\begin{aligned} f(3.9) &= 100 \\ f(3.99) &= 10\,000 \\ f(3.999) &= 1\,000\,000 \\ f(4.1) &= 100 \\ f(4.01) &= 10\,000 \\ f(4.001) &= 1\,000\,000 \end{aligned}$$

Se advierte que $f(x)$ se hace cada vez más grande cuando los valores de x se acercan al polo $x = 4$; es decir, cuando la distancia entre x y x_0 se aproxima a cero, los valores de $f(x)$ crecen indefinidamente.

Entonces, tenemos que la recta $x = 4$ es una *asíntota vertical a la curva* $y = f(x)$, y gráficamente se observa que esta se va aproximando a dicha asíntota para valores muy próximos a $x = 4$ (figura 2).

Analicemos a continuación la función racional $f(x) = \frac{1}{x-4}$. En este caso, también $x = 4$ es un polo, pero aquí sucede que, para los valores de x muy próximos a $x = 4$ por la izquierda, los valores de la función son negativos, pero muy grandes en valor absoluto. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} f(3.9) &= -10 \\ f(3.99) &= -100 \\ f(3.999) &= -1\,000 \\ f(3.9999) &= -10\,000 \end{aligned}$$

En cambio, por la derecha, los valores de $f(x)$ son positivos y cada vez mayores:

$$\begin{aligned} f(4.1) &= 10 \\ f(4.01) &= 100 \\ f(4.001) &= 1\,000 \\ f(4.0001) &= 100\,000 \\ f(4.00001) &= 1\,000\,000 \\ f(4.000001) &= 1 \times 10^7 \end{aligned}$$

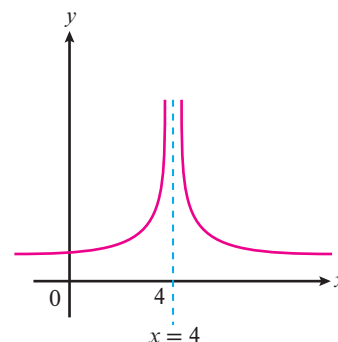


Figura 2. En este caso, $x = 4$ es la asíntota vertical de la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$.

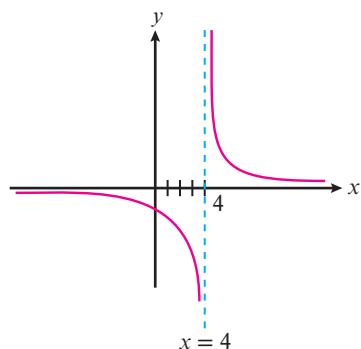


Figura 3. Aquí, $x = 4$ es la asíntota vertical de la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x-4}$.

En conclusión, el valor de $f(x)$ crece indefinidamente (sin límite) cuando x se acerca a $x = 4$ por la derecha, y decrece sin límite cuando x se acerca a $x = 4$ por la izquierda; por tanto, $x = 4$ es la asíntota vertical de $f(x) = \frac{1}{x-4}$, como se muestra en la figura 3. Observa que la gráfica se divide en dos ramas debido a la *discontinuidad* asintótica en $x = 4$.

Como vimos en la tabla 1, para indicar el proceso en el que x se aproxima a un número a por la izquierda se utiliza la notación $x \rightarrow a^-$; y, cuando se aproxima por la derecha, $x \rightarrow a^+$. A la vez, para indicar que el valor de $f(x)$ crece sin límite (indefinidamente) se utiliza la notación $f(x) \rightarrow \infty$; y $f(x) \rightarrow -\infty$, cuando decrece sin límite. Con esto en mente, podemos definir una asíntota vertical como sigue.

Asíntota vertical

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de una función si:

$$f(x) \rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow a^+$$

$$f(x) \rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow a^-$$

De acuerdo con lo anterior, la recta $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de una función racional si $f(x) \rightarrow +\infty$ o si $f(x) \rightarrow -\infty$ a medida que x se acerca a a , ya sea desde la izquierda o desde la derecha. La regla siguiente indica cómo determinar la ecuación de una asíntota vertical de la función racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $Q(x) \neq 0$.

Regla para determinar la ecuación de una asíntota vertical

Si $x = a$ es un número real tal que $P(x)$ es diferente de cero y $Q(x)$ es igual a cero, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica correspondiente a $y = f(x)$.

Ejemplo 5

Estrategias para hallar la ecuación de la asíntota vertical en funciones racionales

Halla la ecuación de la asíntota vertical de la función racional siguiente.

$$f(x) = \frac{4}{x-2}$$

Solución En este caso tenemos que $P(x) = 4$ y $Q(x) = x - 2$. Observa lo siguiente.

$$P(2) = 4$$

$$Q(2) = 0$$

Luego, $x = 2$ es la ecuación de la asíntota vertical de la gráfica de $f(x)$.

Ejemplo 6

Estrategias para hallar la ecuación de la asíntota vertical en funciones racionales

Halla la ecuación de la asíntota vertical de la función racional siguiente.

$$f(x) = \frac{x-4}{x^2-9x+20}$$

Solución Factoricemos primero el denominador de la función.

$$f(x) = \frac{x-4}{(x-4)(x-5)}$$

Observa que $x = 4$ y $x = 5$ anulan el denominador, pero únicamente $x = 5$ es un polo, ya que si $P(x) = x - 4$, entonces $P(5) = 1$. Si $Q(x) = (x - 4)(x - 5)$, entonces $Q(5) = 0$. Por consiguiente, la ecuación de la asíntota vertical que se solicita es:

$$x = 5$$

Prohibida su reproducción

Nota que al simplificar la función racional factorizada se obtiene:

$$\frac{\cancel{x-4}}{(\cancel{x-4})(x-5)} = \frac{1}{x-5}$$

en la que fácilmente se advierte que $x = 5$ es un polo.

Asíntota horizontal de una función racional

Si los valores de una función definida por $y = f(x)$ se acercan a un número fijo c cuando x crece o decrece sin límite, entonces $y = c$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función; es decir, la recta $y = c$ es asíntota horizontal de una función racional cuando el valor de $f(x)$ tiende al valor de c a medida que $x \rightarrow +\infty$ y a medida que $x \rightarrow -\infty$.

Para averiguar si una función racional tiene una asíntota horizontal, el numerador y el denominador de la expresión de esa función se dividen entre la máxima potencia que hay en cualquiera de ellos y después se observa qué sucede con la función cuando $x \rightarrow \infty$. Cabe aclarar que $x \rightarrow \infty$ significa que crece indefinidamente, es decir, sin límite, por ello x es diferente de cero.

Por otra parte, observamos que si $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$, las expresiones $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, etcétera, se hacen cada vez más pequeñas; entonces notamos que estas expresiones *tienden a cero*. Por ejemplo, observa qué valores toma $\frac{1}{x}$ si $x = 10^{15}$, $x = 10^{20}$, $x = 10^{40}$ y así sucesivamente. Verás que son cada vez más pequeños, es decir, tienden a cero.

Estrategias para hallar la ecuación de la asíntota horizontal en funciones racionales

Ejemplo 7

Determina la ecuación de la asíntota horizontal de la función racional siguiente.

$$f(x) = \frac{4x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$$

Solución Dividamos primero el numerador y el denominador de la expresión entre la máxima potencia que hay en ellos, que es x^2 .

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\frac{4x^2 - 5x + 6}{x^2}}{\frac{x^2 - 9}{x^2}} \\ f(x) &= \frac{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{9}{x^2}} \\ f(x) &= \frac{4 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{9}{x^2}} \end{aligned}$$

Si $x \rightarrow \infty$, entonces las expresiones $\frac{5}{x}$, $\frac{6}{x^2}$ y $\frac{9}{x^2}$ tienden a cero; por ende, el valor de $f(x)$ tiende a $\frac{4}{1} = 4$. Dicho de otro modo, si $x \rightarrow \infty$, entonces $f(x)$ tiende a 4; por tanto, la ecuación de la asíntota horizontal es:

$$y = 4$$

Estrategias para hallar la ecuación de la asíntota horizontal en funciones racionales

Ejemplo 8

Determina la ecuación de la asíntota horizontal de la función racional siguiente.

$$f(x) = \frac{3x - 7}{x^2 - 8x - 10}$$

Prohibida su reproducción

Solución Dividamos entre x^2 el numerador y el denominador de la expresión; luego, veamos el comportamiento de $f(x)$ si $x \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\frac{3x-7}{x^2}}{\frac{x^2-8x-10}{x^2}} \\ f(x) &= \frac{\frac{3x}{x^2} - \frac{7}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{8x}{x^2} - \frac{10}{x^2}} \\ f(x) &= \frac{\frac{3x'}{x \cdot x'} - \frac{7}{x^2}}{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x}} - \frac{8x}{x^2} - \frac{10}{x^2}} \\ f(x) &= \frac{\frac{3}{x} - \frac{7}{x^2}}{1 - \frac{8}{x} - \frac{10}{x^2}} \end{aligned}$$

Observa que en esta expresión hemos escrito x^2 como $x \cdot x$

Nota que, cuando $x \rightarrow \infty$, el numerador tiende a cero y el denominador a 1; por tanto, si $x \rightarrow \infty$, se tiene que $f(x) \rightarrow \frac{0}{1}$, es decir, $f(x)$ tiende a cero; por consiguiente, la ecuación de la asíntota horizontal es:

$$y = 0$$

Ejemplo 9

Estrategias para hallar la ecuación de la asíntota horizontal en funciones racionales

Determina la ecuación de la asíntota horizontal (si es que la hay) de la gráfica de la función siguiente.

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$$

Solución Al dividir entre x^3 el numerador y el denominador de la expresión anterior resulta:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\frac{x^3-8}{x^3}}{\frac{x^2-4}{x^3}} \\ f(x) &= \frac{\frac{x^3}{x^3} - \frac{8}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} - \frac{4}{x^3}} \\ f(x) &= \frac{1 - \frac{8}{x^3}}{\frac{1}{x} - \frac{4}{x^3}} \end{aligned}$$

Cuando $x \rightarrow \infty$, el numerador de $f(x)$ tiende a 1, sin embargo, el denominador tiende a cero; es decir, si $x \rightarrow \infty$, $f(x)$ tiende a ∞ y, como consecuencia, la función $f(x) = \frac{x^3-8}{x^2-4}$ no tiene asíntota horizontal.

De los ejemplos anteriores podemos deducir las reglas siguientes para las asíntotas horizontales de una función racional. Si:

$$f(x) = \frac{p(x)}{g(x)} = \frac{a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_1 x^m + b_2 x^{m-1} + \cdots + b_0}$$

Prohibida su reproducción

donde $g(x) \neq 0$ y donde x^n y x^m son las máximas potencias del numerador y del denominador de la expresión, respectivamente, entonces la gráfica de esa función:

1. tiene al eje x como asíntota horizontal cuando $n < m$; es decir, $y = 0$ es la ecuación de su asíntota horizontal;
2. tiene a la recta $y = \frac{a_1}{b_1}$ como asíntota horizontal cuando $n = m$.
3. no tiene asíntota horizontal cuando $n > m$.

En la tabla 2 se muestran algunos ejemplos.

Tabla 2. Ejemplos de funciones y su asíntota horizontal.

Ejemplos	Ecuación de la asíntota horizontal
$f(x) = \frac{2x-5}{x^2-5}$	$y = 0$
$f(x) = \frac{6-2x}{x+6}$	$y = \frac{-2}{1} = -2$
$y = \frac{x^3-8}{x^2-9}$	No tiene asíntota horizontal

Asíntotas oblicuas

Sea $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, con $Q(x) \neq 0$, una función racional expresada en sus términos mínimos (es decir, reducida o simplificada). Si el grado del polinomio $P(x)$ es una unidad mayor que el del polinomio $Q(x)$, entonces el cociente que resulta al efectuarse la división larga es una expresión de la forma $ax + b$. Por consiguiente, $f(x)$ puede escribirse como:

$$f(x) = mx + b + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

donde $r(x)$ es el residuo de la división larga. Por otro lado, si el valor de x crece o decrece sin límite, entonces $\frac{r(x)}{Q(x)}$ tiende a cero y, por consiguiente, los valores de x se aproximan más y más al de $ax + b$, por lo que podemos decir que la recta $y = ax + b$ es una *asíntota oblicua* de la función $f(x)$.

Estrategia para hallar la ecuación de la asíntota oblicua en funciones racionales

Ejemplo 10

Halla la ecuación de la asíntota oblicua de la función racional siguiente.

$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{x + 1}$$

Solución Hagamos la división larga.

$$\begin{array}{r} x-1 \\ x+1 \overline{) x^2+0x+5} \\ \underline{-x^2-x} \\ -x+5 \\ \underline{x+1} \\ 6 \end{array}$$

De acuerdo con la división anterior:

$$f(x) = x - 1 + \frac{6}{x+1}$$

Si $x \rightarrow \infty$, entonces $\frac{6}{x+1} \rightarrow 0$; por tanto, $f(x) \rightarrow x - 1$. En consecuencia, la ecuación de la asíntota oblicua de la función indicada es la recta:

$$y = x - 1$$

Discontinuidad removible de una función racional

Si en la función racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, para $x = a$ se hace $P(x) = 0$ y $Q(x) = 0$, y si el número de veces que aparece $x - a$ en $P(x)$ como factor es el mismo que el número de veces que aparece en $Q(x)$, entonces la curva que corresponde a esa función tiene una discontinuidad en $x = a$, pero a no es un polo de $f(x)$ ni la curva tiene en $x = a$ una asíntota vertical.

Por ejemplo, la expresión $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ no está definida en $x = 1$, ya que $Q(1) = 0$. Y como también $P(1) = 0$, ocurre que para valores próximos a $x = 1$, tanto por la derecha como por la izquierda, la función no crece indefinidamente, como sucede cuando a es un polo, sino que se acerca a un valor determinado.

$$\begin{aligned} f(0.9) &= 1.9 \\ f(0.99) &= 1.99 \\ f(0.999) &= 1.999 \\ f(1.1) &= 2.1 \\ f(1.01) &= 2.01 \\ f(1.001) &= 2.001 \end{aligned}$$

Tanto los números de la izquierda como los de la derecha están próximos a 2, lo cual ocurre porque:

$$\frac{(x+1)(\cancel{x-1})}{(\cancel{x-1})} = x+1$$

Luego, para valores próximos a 1, $f(x)$ se comporta como si fuera $x + 1$, es decir, sus valores se aproximan a 2. Pero como realmente $f(x) \neq x + 1$, ya que $f(x)$ no está definida en $x = 1$, entonces en la curva quedará un hueco que corresponderá al punto $(1, 2)$. En la figura 4 se presenta la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. En este caso, en $x = 1$ hay una *discontinuidad removible o evitable* (observa que en la figura esta discontinuidad se indica como un punto hueco) en las coordenadas $(1, 2)$.

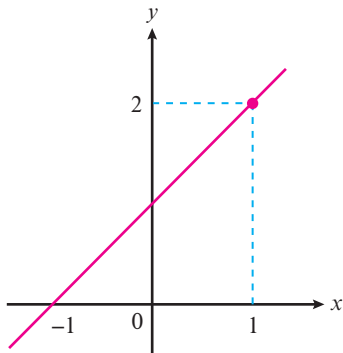


Figura 4. Gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}.$$

Ejemplo 11

Pasos previos al trazo de una gráfica de una función racional

Halla las coordenadas de la discontinuidad removible de la función racional siguiente.

$$f(x) = \frac{x+6}{x^2-36}$$

Solución Empecemos por factorizar el denominador, o sea, $Q(x)$.

$$f(x) = \frac{x+6}{(x+6)(x-6)}$$

Observa que en $x = -6$ tenemos que $P(x) = 0$ y también $Q(x) = 0$, es decir, en $x = -6$ hay una discontinuidad removible o evitable. Para encontrar las coordenadas donde se ubica, simplifiquemos la fracción algebraica y evaluemos la expresión que resulta para $x = -6$.

$$f(x) = \frac{x+6}{(x-6)(x+6)} = \frac{1}{x-6}$$

Ahora llamemos $g(x)$ al resultado obtenido, de esta forma:

$$g(x) = \frac{1}{x-6}$$

Prohibida su reproducción

Entonces:

$$g(-6) = \frac{1}{-6-6}$$

$$g(-6) = -\frac{1}{12}$$

Por ende, las coordenadas en las que se ubica la discontinuidad removible son $(-6, -\frac{1}{12})$.

Pasos previos al trazo de una gráfica de una función racional

Ejemplo 12

Determina lo que se indica en cada inciso con base en la función racional siguiente.

$$f(x) = \frac{x-4}{x^2-9x+20}$$

- a** Los valores de x para los que la función no está definida.

Solución Factoricemos primero la expresión del denominador.

$$f(x) = \frac{x-4}{(x-4)(x-5)}$$

De aquí se determina que la función no está definida en $x = 4$ ni en $x = 5$.

- b** La ecuación de la asíntota vertical. *Nota:* Repasa el ejemplo 5.

Solución En la expresión de la función fácilmente se observa que $x = 5$ es un polo, ya que este valor anula el denominador, pero no el numerador. Por consiguiente, la ecuación de la asíntota vertical es:

$$x = 5$$

- c** Las coordenadas de la discontinuidad removible o evitable.

Solución Al evaluar la función en $x = 4$ resulta que tanto el numerador como el denominador se anulan; es decir, en $x = 4$ existe una discontinuidad removible. Para determinar sus coordenadas, simplifiquemos la expresión.

$$f(x) = \frac{\cancel{x-4}}{(\cancel{x-4})(x-5)} = \frac{1}{x-5}$$

donde $x \neq 5$. Llamemos $g(x) = \frac{1}{x-5}$, luego:

$$g(4) = \frac{1}{4-5} = \frac{1}{-1} = -1$$

Es decir, las coordenadas del punto de la discontinuidad removible son $(4, -1)$.

Nota: Si fuera $f(x) = \frac{x-4}{(x-4)^2(x-5)}$, en $x = 4$ habría un polo.

Gráfica de una función racional

Para un estudio más profundo de las gráficas de las funciones racionales se requieren conocimientos que están fuera del alcance de este libro; sin embargo, para trazar una de tales gráficas sugerimos seguir los pasos enumerados a continuación.

Prohibida su reproducción

Procedimiento para trazar la gráfica de una función racional

1. Determina la intersección de la función con el eje y , en caso de que se pueda evaluar $f(x)$ en $x = 0$.
2. En caso de que sea posible, determina también sus intersecciones con el eje x . Para ello, resuelve la ecuación que resulta de igualar el numerador a cero.
3. Determina, en caso de que la haya, la ecuación de la asíntota horizontal y traza la recta que le corresponde.
4. Traza la recta que representa la asíntota vertical, en caso de que la haya.
5. Determina, en caso de que las haya, las discontinuidades removibles.
6. Determina al menos dos puntos de la gráfica que estén a la derecha de la asíntota vertical (en caso de que la haya) y dos que estén a la izquierda.
7. Une mediante curvas suaves los puntos obtenidos para trazar la gráfica de la función.

En los ejemplos siguientes se muestra cómo aplicar este procedimiento.

Ejemplo 13

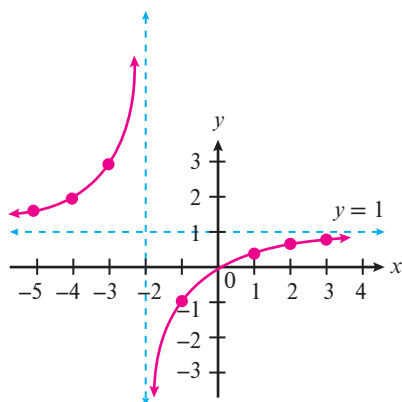
Trazo de una gráfica de una función racional

Traza la gráfica de la función racional siguiente.

$$f(x) = \frac{x}{x+2}$$

Solución Sigamos el procedimiento descrito líneas arriba.

- La intersección en x es cero. Se obtiene al igualar el numerador de la ecuación a cero; en este caso $x = 0$.
- Como consecuencia de lo anterior, la intersección en y también es cero.
- La ecuación de la asíntota horizontal es $y = 1$.
- La ecuación de la asíntota vertical es $x = -2$.
- Hallemos en seguida, mediante una tabulación, un conjunto de puntos que estén en la gráfica de la función.



x	$y = \frac{x}{x+2}$	$P(x, y)$
-5	$-\frac{5}{3}$	$(-5, \frac{5}{3})$
-4	2	$(-4, 2)$
-3	3	$(-3, 3)$
-2	Indefinida	
0	0	$(0, 0)$
1	$\frac{1}{3}$	$(1, \frac{1}{3})$
2	$\frac{1}{2}$	$(2, \frac{1}{2})$
3	$\frac{3}{5}$	$(3, \frac{3}{5})$

Con la información obtenida, tracemos la gráfica de la función.

Prohibida su reproducción

Traza la gráfica de la función racional siguiente.

$$f(x) = \frac{2}{x+1}$$

Solución De nuevo, aplicamos el procedimiento descrito párrafos atrás.

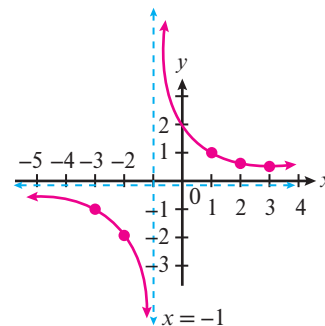
- De acuerdo con la ecuación, la gráfica no tiene intersección con el eje x .
- Hallemos la intersección en y .

$$y = \frac{2}{x+1}$$

Si $x = 0$, entonces $y = 2$.

- La ecuación de la asíntota horizontal es $y = 0$.
- La ecuación de la asíntota vertical es $x = -1$.
- Hallemos en seguida, mediante una tabulación, algunos puntos que estén en la gráfica de la función.

x	$f(x) = \frac{2}{x+1}$	$P(x, y)$
-4	$-\frac{2}{3}$	$(-4, -\frac{2}{3})$
-3	-1	$(-3, -1)$
-2	-2	$(-2, -2)$
-1	Indefinida	
0	2	$(0, 2)$
1	1	$(1, 1)$
2	$\frac{2}{3}$	$(2, \frac{2}{3})$
3	$\frac{1}{2}$	$(3, \frac{1}{2})$



Con la información obtenida, tracemos la gráfica de la función.

Actividades de aprendizaje 1

Continúa con las actividades de aprendizaje de estos temas en la segunda sección del libro.

Resuelvo ejercicios con funciones racionales, trazo sus gráficas y determino sus asíntotas verticales, horizontales u oblicuas

1. EN PAREJAS Determinen el dominio de las funciones racionales siguientes.

1. $f(x) = \frac{x-5}{x^2+7x}$

2. $f(x) = \frac{x+6}{x^2-25}$

3. $f(x) = \frac{x+2}{x^2-6x+9}$

4. $f(x) = \frac{x-7}{x^2+4}$

COMUNICAR PARA APRENDER

5. **EN PAREJAS** Explica oralmente a un compañero qué es una asíntota y, después, indícale qué relación hay entre la función racional $f(x) = \frac{1}{x-2}$ y la recta $x = 2$. Posteriormente, escucha lo que él te explique y, juntos, obtengan conclusiones. Preséntelas ante sus compañeros de grupo y, con la guía del profesor, coevalúen su trabajo.

6. Toma como referencia la función racional

$$f(x) = \frac{ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}{bx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0}$$

Con base en ella, explica a un compañero cuándo:

- a la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función;
- b la recta $y = \frac{a}{b}$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función;
- c la función no tiene asíntotas horizontales;
- d la función racional tiene una asíntota oblicua.

Escucha las explicaciones de tu compañero. Obtengan conclusiones y preséntelas al grupo. Con la guía del profesor, lleguen a conclusiones generales y, con base en ellas, coevalúen su trabajo.

Tú decides

Roberto y Joaquín estudian las funciones racionales y en particular las asíntotas; después de estudiar algunos ejemplos, Roberto llega a la conclusión de que todas las funciones racionales tienen que tener obligatoriamente algún tipo de asíntota, ya sea vertical, horizontal u oblicua, mientras que Joaquín opina que las funciones racionales solo tienen obligatoriamente asíntotas verticales, pero no oblicuas u horizontales. ¿Qué piensas tú? Explica tu razonamiento a tus compañeros.