Mc
Graw
Hill

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Autor: Octavio Sánchez

Impreso: 9781456286422

VitalSource: Pendiente

connect

ISBN: Pendiente

DESCRIPCIÓN GENERAL

El texto, organizado en 10 unidades, presenta muchos ejemplos, datos curiosos, dichos, actividades y trucos matemáticos. El material del CD se ha migrado a el OLC, por lo que todos los ejercicios ahora se encuentran en esta sitio y se ha aumentado el número de ejercicios.
Asimismo, los anexos que aparecían al final del libro impreso, se han alojado también en el OLC y se han hecho correcciones.

CONTENIDO

Fundamentos matemáticos
Distribución de frecuencias
Medidas de tendencia central
Medidas de dispersión
Análisis combinatorio
Estudio básico de probabilidades
Probabilidad condicional
Distribuciones de probabilidades variables discretas
Distribuciones de probabilidades para variables continuas
Análisis de tendencias.

RECURSOS

Carta compromiso
Cálculo aproximado de la raíz cúbica
Factoriales de los números 70 a 865
El binomio de Newton y el triángulo de Pascal
Muestreo para aceptación de lotes con un nivel de confianza de 90%
Área bajo la curva de distribución normal estandarizada
Glosario
Fórmulas utilizadas
Hoja de cálculo

Probabilidad y estadística

Octavio Sánchez

Cuarta edición

Distribuciones de frecuencias

2

Contenido:

- Conceptos básicos
- Presentaciones gráficas
- Aplicaciones gráficas y numéricas
- Consideraciones adicionales

Una distribución de frecuencia es una tabla que presenta el número de elementos que pertenecen a cada una de las clases o categorías en las que se divide un grupo de datos para estudiarlos.

Conceptos básicos

Los siguientes son los conceptos fundamentales de una distribución de frecuencias:

- El número de clases o categorías en que se agruparán los datos.
- El intervalo o ancho nominal de clase, delimitado por los valores mínimo y máximo aceptables en cada clase.
- La frecuencia o el número de elementos de cada clase.

En la tabla 1 se muestra un ejemplo de una tabla de distribución de frecuencias. Observa que se indican las clases, los intervalos (límites inferior y superior) y la frecuencia de elementos de cada clase.

Tabla 1 Distribución de frecuencias con sus elementos fundamentales

Clase	Límite inferior	Límite superior	Frecuencia (egresados)
A	Enero 1, 2016	Diciembre 31, 2016	415
B	Enero 1, 2017	Diciembre 31, 2017	381
C	Enero 1, 2018	Diciembre 31, 2018	472
D	Enero 1, 2019	Diciembre 31, 2019	589
E	Enero 1, 2020	Diciembre 31, 2020	723

Otros conceptos derivados de una distribución de frecuencias, son los siguientes:

- Los límites exactos.
- Las marcas de clase o valores centrales de cada intervalo.
- Las frecuencias relativas y las frecuencias acumuladas y complementarias.

Intervalos uniformes, desiguales o abiertos

Pese a que en la mayoría de los casos el ancho de clase es uniforme, como se advierte en la tabla 1, a veces el ancho de clase debe ser desigual o incluso abierto (es decir, sin límite) en uno o dos extremos. Considera los ejemplos mostrados en las tablas 2 y 3.

Tabla 2

Clase	Límite inferior (años)	Límite superior (años)
Bebés	0	1
Niños	2	12
Adolescentes	13	16
Jóvenes	17	25
Adultos	26	60
Ancianos	61	–

Tabla 3

Clase	Límite inferior (kg)	Límite superior (kg)
Ligero	–	45
Medio	46	60
Pesado	61	80
Muy pesado	81	–

¿Sabías que...?

La diferencia entre el límite superior de una clase y el límite inferior de la siguiente clase se conoce como unidad de variación.

El *intervalo*, conocido también como *rango, amplitud* o *ancho de clase,* puede definirse como la diferencia entre el inferior de la clase menos el límite inferior de la clase anterior. También puede considerarse como la diferencia entre el límite superior y el inferior de cada clase, más la unidad de variación de los datos.

Un concepto importante en este punto es el de *unidad de variación,* que es la mínima diferencia que puede presentarse entre dos datos del conjunto que se analiza. Por ejemplo, si los datos son las estaturas en metros (m) y centímetros (cm) de un grupo de personas, la mínima diferencia entre ellas será un centímetro; es decir, en este ejemplo la unidad de variación será 0.01 metros.

La unidad de variación en el caso de datos que representen el peso (masa) en kilogramos (kg) de un grupo de personas será 1 kg, si suponemos que el peso se acepta solo en kilogramos enteros, sin fracciones.

Si los datos se recopilan en múltiplos de alguna medida, por ejemplo, \$50.00, 100 m^2 o 10 kilómetros (km), la mínima diferencia entre dos datos será, en cada caso, la unidad de variación (en este ejemplo, \$50.00, 100 m^2 o 10 km).

EJEMPLO 1

Determina el intervalo de cada una de las clases de las tablas siguientes:

Tabla A

Clase	Límite inferior (\$)	Límite superior (\$)
A	1 010	1 150
B	1 160	1 300
C	1 310	1 450
D	1 460	1 600

Tabla B

Clase	Límite inferior (metros)	Límite superior (metros)
J	0.65	0.85
K	0.86	0.95
L	0.96	1.20
M	1.21	1.50

Tabla C

Clase	Límite inferior (años)	Límite superior (años)
W	48	59
X	60	71
Y	72	83
Z	84	–

Solución

El intervalo de cada clase puede calcularse así:

$$\text{Intervalo de clase} = \text{límite inferior de la clase siguiente} - \text{límite inferior de la clase}$$

Fórmula del intervalo de clase

Así:

	$
A	1010 - 1150
B	1160 - 1300
C	1310 - 1450
D	1460 - 1600
	1610

	Metros (m)
J	0.65 - 0.85
K	0.86 - 0.95
L	0.96 - 1.20
M	1.21 - 1.50
	1.51

	Años
W	48 - 59
X	60 - 71
Y	72 - 83
Z	84 -
	infinito

Nota: El límite inferior de la clase siguiente a la última es igual al límite superior de la última clase más la unidad de variación. En estos ejemplos la unidad de variación es 10, 0.01 y 1, respectivamente.

Tabla A Intervalos uniformes

	$	$	$
Intervalo de la clase *A* =	1 160	− 1 010	= 150
Intervalo de la clase *B* =	1 310	− 1 160	= 150
Intervalo de la clase *C* =	1 460	− 1 310	= 150
Intervalo de la clase *D* =	1 610	− 1 460	= 150

Tabla B Intervalos desiguales

	m	m	m
Intervalo de la clase *J* =	0.86	− 0.65	= 0.21
Intervalo de la clase *K* =	0.96	− 0.86	= 0.10
Intervalo de la clase *L* =	1.21	− 0.96	= 0.25
Intervalo de la clase *M* =	1.51	− 1.21	= 0.30

Tabla C Intervalos abiertos, inferior y superior o ambos

	años	años	años
Intervalo de la clase *W* =	60	− 48	= 12
Intervalo de la clase *X* =	72	− 60	= 12
Intervalo de la clase *Y* =	84	− 72	= 12
Intervalo de la clase *Z* =	infinito	− 84	= infinito

Nota: El límite superior de la clase *Z* incluye todos los números del 84 en adelante, es decir, hasta el infinito, por lo que el intervalo de esa clase es infinito.

¿Sabías que...?

Los huracanes se clasifican, de acuerdo con la escala de Saffir/Simpson, con base en la intensidad de sus vientos. Así:

Categoría	Vientos, en kilómetros por hora
Uno	De 119 a 153
Dos	De 154 a 177
Tres	De 178 a 209
Cuatro	De 210 a 250
Cinco	De más de 250

Determinación de frecuencias de datos fuente

Antes que nada, es importante tener los datos necesarios para el análisis. Estos se pueden obtener de diversas maneras; las más comunes son las siguientes:

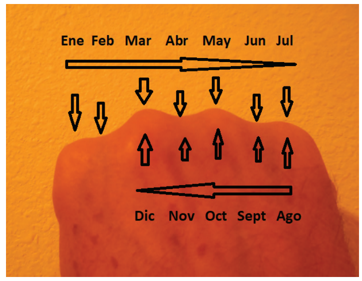
- Recopilación de todos los datos del grupo o población en estudio (por ejemplo, las estaturas de todos los estudiantes de una escuela).
- Obtención de una muestra, la cual debe diseñarse y elaborarse concienzudamente, de manera que satisfaga lo que se espera de ella: que represente a la población de donde proviene.

Un método de muestreo puede ser por selección de números aleatorios, como los que se muestran en la tabla correspondiente en los anexos de OLC.

Optativamente, los datos para elaborar una distribución de frecuencias pueden ordenarse de menor a mayor o de mayor a menor. Con ello resulta más fácil hacer los cálculos subsecuentes, aunque la clasificación en sí representa un esfuerzo considerable. Por otra parte, el orden numérico o alfabético de los datos puede ser a veces el único tratamiento que deba dárseles. Por ejemplo, si los datos de un directorio telefónico estuvieran en desorden resultarían de poca utilidad.

¿Sabías que...?

Puedes usar los nudillos de la mano para saber cuáles son los meses del año que tienen 31 días. Si la flecha cae en nudillo, ese mes tiene 31 días.



Recopilación de datos

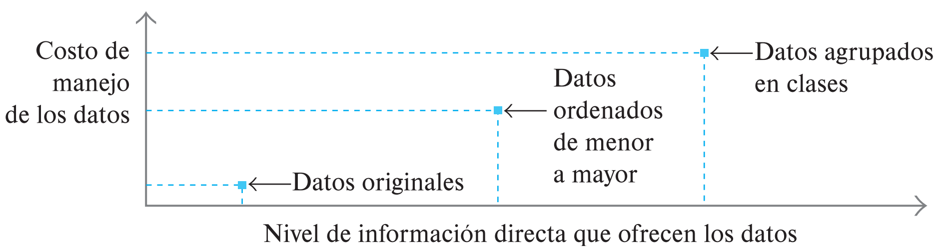
Una persona caminaba por la banqueta junto al patio de un manicomio y oía cantar: ocho, ocho, ocho... Curiosa por ver lo que sucedía, se acercó a un agujero en la pared. Al mismo tiempo que sintió un piquete en el ojo, oyó cantar: nueve, nueve, nueve...

Tabla 4 ¿Quiénes y cuántos somos en el directorio telefónico?

Apellido	Teléfonos	Porcentaje
Aguilar	6 740	0.59
Corona	1 890	0.17
Fernández	4 960	0.44
Flores	12 560	1.11
García	31 080	2.75
González	27 470	2.43
Hernández	34 440	3.04
López	21 780	1.93
Martínez	27 680	2.45
Pérez	17 840	1.58
Ramírez	17 620	1.56
Rodríguez	20 940	1.85
Sánchez	21 580	1.91
Zúñiga	1 140	0.10
Otros	882 780	78.09
Total	1 130 500	100.00

Una consideración importante es el número de clases o categorías en donde se deben agrupar los datos. Cuando estos son de naturaleza cualitativa, por ejemplo, la presentación de una persona (puede ser excelente, muy buena, buena, regular o deficiente) o la edad de una persona (puede ser bebé, niño, adolescente, joven, adulto o anciano, aunque también podría ser niño, joven o adulto), el número de clases queda definido por la naturaleza de los datos que se analizan y por el detalle que se desea de estos.

El costo y el valor de la información



Si los datos que se analizan son numéricos, el número de clases más común está entre 5 y 9, aunque puede ser menor, o tan grande como las circunstancias lo exijan.

En caso de que se desconozca, el número de clases puede determinarse, por ejemplo, en función de la raíz cuadrada del número de datos, es decir:

$$\text{Número de clases} = \sqrt{\text{Número de datos}}$$

Fórmula para determinar el número de clases

Resulta conveniente usar esta fórmula si el número de datos es menor que 100 o 200. A partir de ese número de datos, el número de clases resulta muy alto, por lo que podría utilizarse otra fórmula, por ejemplo, la raíz cúbica del número de datos, o bien, determinarlo en función del detalle que se desee obtener.

Si se ha decidido que el ancho de cada clase sea uniforme, deberá calcularse dividiendo la diferencia entre el valor mayor y el valor menor de los datos entre el número de clases deseado.

Cuenta las letras

Determina la frecuencia de las letras de las siguientes expresiones:

Cuando cuentes cuentos,
cuenta cuántos cuentos cuentas,
porque cuando cuentas cuentos,
no sabes cuántos cuentos cuentas.

Pedro Pablo Pérez Pinto
pasó por pueblo pintoresco,
Pero por puro perico
perdió precioso pañuelo poblano.

Rápido corren los carros
cargados de frutas
del ferrocarril.

Fuente: www.trabalenguascortos.com

Pasos para la elaboración de tablas de distribución de frecuencias

1. Recopilación de datos.
2. Clasificación de los datos de menor a mayor (optativo).
3. Determinación del número de clases.
4. Cálculo del tamaño exacto del intervalo o ancho de clase.
5. Determinación del tamaño ajustado del intervalo o ancho de clase.
6. Identificación de los límites de clase.
7. Conteo de los datos.

Si el ancho calculado resulta ser un múltiplo exacto de la unidad de variación, por ejemplo 811, el ancho ajustado deberá ser por lo menos una unidad de variación mayor que el ancho calculado (en este caso, 812). De no hacerlo así, el o los valores más grandes no cabrían dentro de los límites resultantes.

El siguiente paso en la elaboración de una tabla de distribución de frecuencias es ajustar el tamaño calculado del ancho de clase. Esto se logra aumentando el ancho de clase calculado por lo menos a la siguiente unidad de variación; por citar un caso, si el ancho calculado de un grupo de datos cuya unidad de variación es 1 resulta ser 193.4, el ancho ajustado debe ser por lo menos 194, aunque también podría ser 195 o incluso 200.

Curiosidades matemáticas

Comprueba que, al clasificar los datos siguientes en nueve clases, si estos son de 0.05 de ancho, el dato más grande quedará fuera de los límites, pero si el ancho de clase es de 0.06 y el primer límite inferior es 1.47, la última clase quedará vacía.

Datos: 1.78, 1.62, 1.85, 1.92, 1.61, 1.89, 1.52, 1.59, 1.49, 1.69, 1.76, 1.81, 1.83, 1.47, 1.73, 1.49, 1.764, 1.52, 1.90 y 1.73.

La estructura de una tabla de distribución de frecuencias queda definida por los límites inferior y superior de cada clase. A estos límites se les conoce también como *límites nominales*.

El primer límite inferior puede ser el valor más pequeño de los datos y el último límite superior podría ser el valor más grande. El primer límite superior es el límite inferior más el ancho de clase menos una unidad de variación. Los límites inferior y superior de las siguientes clases se obtienen al sumar el ancho de clase a los valores de la clase anterior, como se indica en la tabla 5.

Tabla 5 Cálculo de los límites inferior y superior

Límite inferior	Límite superior
500	699
700	899
900	1 099
1 100	1 299
1 300	1 499

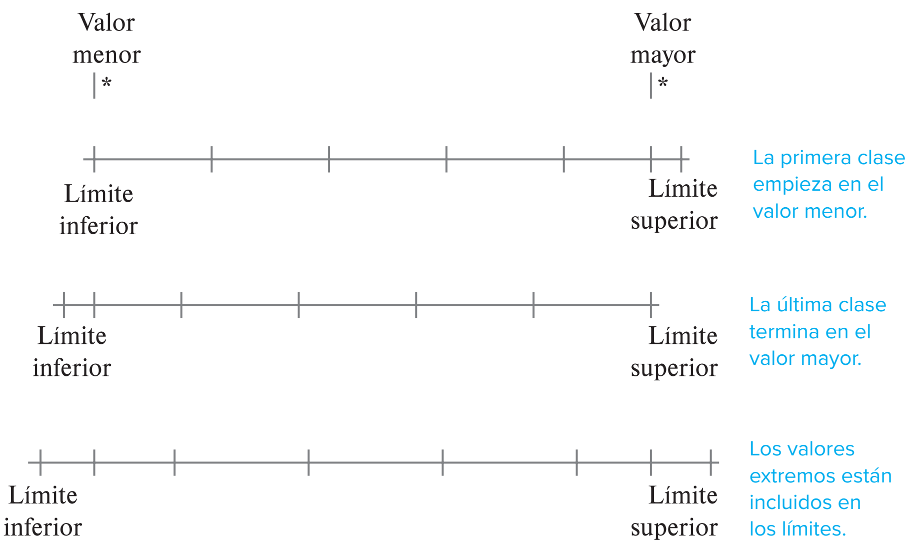
Límite inferior más ancho de clase menos unidad de variación

Cada uno de estos valores es igual al anterior más el ancho de clase

En todos los casos debe comprobarse que la diferencia entre los límites superior (LS) e inferior (LI) de cada clase sea igual al ancho de clase (AC) menos una unidad de variación (UV), es decir:

$$LS - LI = AC - UV$$

Como el ancho de clase multiplicado por el número de clases es mayor que la diferencia entre el valor mayor y el menor de los datos, se puede distribuir la diferencia en uno u otro extremo de la tabla, o en ambos. Esto se presenta gráficamente a continuación.



El último paso de este proceso consiste en determinar la frecuencia de la clase; esto es, establecer, mediante conteo, el número de elementos incluidos en cada clase.

EJEMPLO 2

Estos valores corresponden a la producción mensual, en toneladas (ton), de una empacadora de plátanos. Clasifica estos datos en clases de tamaño uniforme:

782, 1 333, 515, 1 475, 696, 832, 1 052, 700, 987, 542, 1 296, 704, 814, 1 482, 1 023, 739, 643, 956, 1 023 y 784.

Solución

Paso 1. Se tienen los datos.

Paso 2. Se clasifican los datos de menor a mayor, como se muestra enseguida:

Datos originales				
782	1 333	515	1 475	696
832	1 052	700	987	542
1 296	704	814	1 482	1 023
739	643	956	1 023	784

Datos ordenados				
515	542	643	696	700
704	739	782	784	814
832	956	987	1 023	1 023
1 052	1 296	1 333	1 475	1 482

Paso 3. Se determina el número de clases:

$$\text{Número de clases} = \sqrt{\text{Número de datos}} = \sqrt{20} = 4.47 = 5$$

Paso 4. Se calcula el tamaño del ancho de clase o intervalo:

$$\text{Intervalo exacto} = \frac{\text{Valor mayor} - \text{Valor menor}}{\text{Número de clases}}$$

$$= \frac{1\,482 - 515}{5} = 193.4$$

Fórmula para calcular el ancho de clase o intervalo

Paso 5. Se establece el tamaño exacto del intervalo. En este ejemplo, la unidad de variación de los datos es 1, por lo que el tamaño ajustado o ancho de clase debe ser por lo menos igual a la siguiente unidad de variación después de 193.4 (es decir, por lo menos 194), mientras que el límite inferior de la primera clase será 515, aunque podría ser un valor menor.

Paso 6. Se identifican los límites de clase:

$$\begin{array}{c}\text{Límite inferior}\\ \text{de la clase}\end{array} = \begin{array}{c}\text{Límite inferior de}\\ \text{la clase anterior}\end{array} + \begin{array}{c}\text{Tamaño}\\ \text{del intervalo}\end{array}$$

Fórmula para calcular el límite inferior de la clase

Límite inferior de la clase $B = 515 + 194 = 709$

Límite inferior de la clase $C = 709 + 194 = 903$

Límite inferior de la clase $D = 903 + 194 = 1\,097$

Límite inferior de la clase $E = 1\,097 + 194 = 1\,291$

$$\begin{array}{c}\text{Límite superior}\\ \text{de la clase}\end{array} = \begin{array}{c}\text{Límite inferior de}\\ \text{la clase anterior}\end{array} + \text{Intervalo} - \begin{array}{c}\text{Unidad de}\\ \text{variación}\end{array}$$

Fórmula para calcular el límite superior de la clase

Límite superior de la clase $A = 515 + 194 - 1 = 708$

Límite superior de la clase $B = 709 + 194 - 1 = 902$

Límite superior de la clase $C = 903 + 194 - 1 = 1\,096$

Límite superior de la clase $D = 1\,097 + 194 - 1 = 1\,290$

Límite superior de la clase $E = 1\,291 + 194 - 1 = 1\,484$

Paso 7. En la tabla siguiente se muestran los límites de cada clase, así como el conteo de los datos.

Clase	Límite inferior (toneladas)	Límite superior (toneladas)	Frecuencia (meses)	
A	515	708	𝍸 |	6
B	709	902	𝍸	5
C	903	1 096	𝍸	5
D	1 097	1 290		0
E	1 291	1 484	||||	4

Valores XX X XXX X XX X X XX XX X XX XX
Clases
Límites 515 708 709 902 903 1 096 1 097 1 290 1 291 1 484

Soluciones alternativas

Si consideramos cinco clases con intervalo uniforme de 200, y que estas deben incluir todos los valores, puede seleccionarse 500 como límite inferior de la primera clase y a partir de este límite identificar los demás.

$$\text{Límite inferior de la clase} = \text{Límite inferior de la clase anterior} + \text{Tamaño del intervalo}$$

Límite inferior de la clase $B = 500 + 200 = 700$

Límite inferior de la clase $C = 700 + 200 = 900$

Límite inferior de la clase $D = 900 + 200 = 1\,100$

Límite inferior de la clase $E = 1\,100 + 200 = 1\,300$

$$\text{Límite superior de la clase} = \text{Límite inferior de la clase anterior} + \text{Intervalo} - \text{Unidad de variación}$$

Límite superior de la clase $A = 500 + 200 - 1 = 699$

Límite superior de la clase $B = 700 + 200 - 1 = 899$

Límite superior de la clase $C = 900 + 200 - 1 = 1\,099$

Límite superior de la clase $D = 1\,100 + 200 - 1 = 1\,299$

Límite superior de la clase $E = 1\,300 + 200 - 1 = 1\,499$

En la tabla siguiente se muestran los límites de cada clase, así como el conteo de los datos.

Clase	Límite inferior (toneladas)	Límite superior (toneladas)	Frecuencia (meses)	
A	500	699	||||	4
B	700	899	𝍸 ||	7
C	900	1 099	𝍸	5
D	1 100	1 299	|	1
E	1 300	1 499	|||	3

Valores XX X X XX X XX XX X X XXX X X XX
Clases
Límites 500 699 700 899 900 1 099 1 100 1 299 1 300 1 499

Si el límite inferior de la primera clase hubiera sido 501, la tabla resultante sería la siguiente:

Clase	Límite inferior (toneladas)	Límite superior (toneladas)	Frecuencia (meses)	
A	501	700	~~||||~~	5
B	701	900	~~||||~~ |	6
C	901	1 100	~~||||~~	5
D	1 101	1 300	|	1
E	1 301	1 500	|||	3

Valores XX X XX XX XX XX X X XXX X X XX
Clases
Límites 501 700 701 900 901 1 100 1 101 1 300 1 301 1 500

Observa que la frecuencia (número de elementos en cada clase) ha variado ligeramente debido a la modificación de los límites de clase.

EJEMPLO 3

Clasifica los valores siguientes en cinco clases de tamaño uniforme (todas las cantidades en pesos, $):

800.00, 1 350.00, 450.00, 1 500.00, 700.00, 850.00, 1 050.00, 700.00, 1 000.00, 550.00, 1 100.00, 1 300.00, 700.00, 800.00, 1 400.00, 1 550.00, 1 000.00, 750.00, 600.00, 950.00, 1 000.00, 800.00

Solución

Paso 1. Ya se tienen recopilados los datos.

Paso 2. Se clasifican del menor al mayor, como se observa enseguida:

Datos originales ($)			
800	1 350	450	1 500
700	850	1 050	700
1 000	550	1 100	1 300
700	800	1 400	1 550
1 000	750	600	950
1 000	800		

Datos ordenados ($)			
450	550	600	700
700	700	750	800
800	800	850	950
1 000	1 000	1 000	1 050
1 100	1 300	1 350	1 400
1 500	1 550		

Paso 3. Se determina el número de clases. El problema indica que deben formarse cinco clases, así que ya se dio este paso.

Paso 4. Se calcula el tamaño del intervalo o ancho de clase, que en este problema ha de ser uniforme, como se define en el enunciado del ejemplo:

$$\text{Intervalo exacto} = \frac{\text{Valor mayor} - \text{Valor menor}}{\text{Número de clases}}$$

Fórmula para calcular intervalo de clase exacto

$$= \frac{\$1\,550.00 - \$450.00}{5} = \$220.00$$

Paso 5. Se determina el tamaño ajustado del ancho de clase. En este ejemplo la unidad de variación de los datos es 50, por lo que el tamaño ajustado ha de ser por lo menos igual a la siguiente unidad de variación después de $220.00 (es decir, por lo menos $250.00), mientras que el límite inferior de la primera clase será $450.00, aunque podría ser un valor menor.

Paso 6. Se determinan los límites de clase:

$$\begin{array}{c}\text{Límite inferior}\\ \text{de la clase}\end{array} = \begin{array}{c}\text{Límite inferior de}\\ \text{la clase anterior}\end{array} + \begin{array}{c}\text{Tamaño}\\ \text{del intervalo}\end{array}$$

Límite inferior de la clase $B = 450.00 + 250.00 = 700.00$

Límite inferior de la clase $C = 700.00 + 250.00 = 950.00$

Límite inferior de la clase $D = 950.00 + 250.00 = 1\,200.00$

Límite inferior de la clase $E = 1\,200.00 + 250.00 = 1\,450.00$

$$\begin{array}{c}\text{Límite superior}\\ \text{de la clase}\end{array} = \begin{array}{c}\text{Límite inferior de}\\ \text{la clase anterior}\end{array} + \text{Intervalo} - \begin{array}{c}\text{Unidad de}\\ \text{variación}\end{array}$$

Límite superior de la clase $A = 450.00 + 250.00 - 50.00 = 650.00$

Límite superior de la clase $B = 700.00 + 250.00 - 50.00 = 900.00$

Límite superior de la clase $C = 950.00 + 250.00 - 50.00 = 1150.00$

Límite superior de la clase $D = 1\,200.00 + 250.00 - 50.00 = 1\,400.00$

Límite superior de la clase $E = 1\,450.00 + 250.00 - 50.00 = 1\,650.00$

Paso 7. En la tabla siguiente se muestran los límites de cada clase, así como el conteo de los datos.

Clase	Límite inferior ($)	Límite superior ($)	Frecuencia	
A	$450.00	$650.00	|||	3
B	$700.00	$900.00	~~||||~~ |||	8
C	$950.00	$1 150.00	~~||||~~ |	6
D	$1 200.00	$1 400.00	|||	3
E	$1 450.00	$1 650.00	||	2

Valores X XX XXX XXX X XXXXX X X X X X

Clases

Límites 450 650 700 900 950 1 150 1 200 1 400 1 450 1 650

Si el límite inferior de la primera clase hubiera sido $400.00, la tabla resultante sería la siguiente:

Clase	Límite inferior ($)	Límite superior ($)	Frecuencia	
A	$400.00	$600.00	|||	3
B	$650.00	$850.00	~~||||~~ |||	8
C	$900.00	$1 100.00	~~||||~~ |	6
D	$1 150.00	$1 350.00	||	2
E	$1 400.00	$1 600.00	|||	3

Valores X X X XXX X XXXX XXXX X X X X X X X

Clases

Límites 450 600 650 850 900 1 100 1 150 1 350 1 400 1 600

Observa que la frecuencia (número de elementos en cada clase) ha variado ligeramente, debido a la modificación de los límites de clase.

EJEMPLO 4

Clasifica los valores siguientes (expresados en metros, m) en cinco clases de tamaño uniforme:

1.82, 1.43, 1.51, 1.47, 1.69, 1.88, 1.52, 1.72, 1.78, 1.54, 1.61, 1.66, 1.70, 1.81, 1.58, 1.48, 1.53, 1.73, 1.61, 1.56, 1.57, 1.78

Solución

Paso 1. Ya se cuenta con los datos.

Paso 2. Se ordenan de mayor a menor, como se muestra enseguida:

Datos originales (m)			
1.82	1.43	1.51	1.47
1.69	1.88	1.52	1.72
1.78	1.54	1.61	1.66
1.70	1.81	1.58	1.48
1.53	1.73	1.61	1.56
1.57	1.78		

Datos ordenados (m)			
1.43	1.47	1.48	1.51
1.52	1.53	1.54	1.56
1.57	1.58	1.61	1.61
1.66	1.69	1.70	1.72
1.73	1.78	1.78	1.81
1.82	1.88		

Paso 3. Se determina el número de clases, que en este ejemplo ha de ser cinco.

Paso 4. En el planteamiento inicial del ejemplo se pide que las clases tengan tamaño uniforme; así, el tamaño exacto del intervalo o ancho de clase es:

$$\text{Intervalo exacto} = \frac{\text{Valor mayor} - \text{Valor menor}}{\text{Número de clases}}$$

$$= \frac{1.88 - 1.43}{5} = 0.09 \text{ m}$$

Paso 5. Se determinan los límites de clase. Si consideramos cinco clases con intervalo uniforme de 0.10 m, y que estas deben incluir todos los valores, puede seleccionarse 1.40 m como límite inferior de la primera clase, y a partir de ahí se establecen los demás límites:

$$\begin{array}{c} \text{Límite inferior} \\ \text{de la clase} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Límite inferior de} \\ \text{la clase anterior} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Tamaño} \\ \text{del intervalo} \end{array}$$

Límite inferior de la clase $B = 1.40 \text{ m} + 0.10 \text{ m} = 1.50 \text{ m}$

Límite inferior de la clase $C = 1.50 \text{ m} + 0.10 \text{ m} = 1.60 \text{ m}$

Límite inferior de la clase $D = 1.60 \text{ m} + 0.10 \text{ m} = 1.70 \text{ m}$

Límite inferior de la clase $E = 1.70 \text{ m} + 0.10 \text{ m} = 1.80 \text{ m}$

Observa que todos los datos son múltiplos de 0.01 m, por lo que la separación entre el límite superior de una clase y el límite inferior de la clase siguiente (es decir, la unidad de variación) es de 0.01 m.

$$\text{Límite superior de la clase} = \text{Límite inferior de la clase anterior} + \text{Intervalo} - \text{Unidad de variación}$$

Límite superior de la clase $A = 1.40 \text{ m} + 0.10 \text{ m} - 0.01 \text{ m} = 1.49 \text{ m}$

Límite superior de la clase $B = 1.50 \text{ m} + 0.10 \text{ m} - 0.01 \text{ m} = 1.59 \text{ m}$

Límite superior de la clase $C = 1.60 \text{ m} + 0.10 \text{ m} - 0.01 \text{ m} = 1.69 \text{ m}$

Límite superior de la clase $D = 1.70 \text{ m} + 0.10 \text{ m} - 0.01 \text{ m} = 1.79 \text{ m}$

Límite superior de la clase $E = 1.80 \text{ m} + 0.10 \text{ m} - 0.01 \text{ m} = 1.89 \text{ m}$

Paso 6. En la tabla siguiente se muestran los límites de cada clase, así como el conteo de los datos.

Clase	Límite inferior (m)	Límite superior (m)	Frecuencia	
A	1.40	1.49	|||	3
B	1.50	1.59	~~||||~~ ||	7
C	1.60	1.69	||||	4
D	1.70	1.79	~~||||~~	5
E	1.80	1.89	|||	3

Valores X XX XXXX XXX XX X X X XX XX XX X

Clases

Límites 1.40 1.49 1.50 1.59 1.60 1.69 1.70 1.79 1.80 1.89

Si el límite inferior de la primera clase hubiera sido 1.41 m, la tabla resultante sería la siguiente:

Clase	Límite inferior (m)	Límite superior (m)	Frecuencia	
A	1.41	1.50	|||	3
B	1.51	1.60	~~||||~~ ||	7
C	1.61	1.70	~~||||~~	5
D	1.71	1.80	||||	4
E	1.81	1.90	|||	3

Observa que la frecuencia (número de elementos en cada clase) ha variado ligeramente debido a la modificación de los límites de clase.

Límites exactos y marcas de clase

Los límites nominales de una clase indican los valores mínimo y máximo aceptables en esa clase; por ejemplo, de 50 000 a 99 999 habitantes, o de 1.61 a 1.70 m; sin embargo, existe una zona entre el límite superior de una clase y el límite inferior de la clase siguiente que no está incluida en los límites nominales. Aquí es donde interviene el concepto de límites exactos, los cuales marcan con precisión el valor inicial y el final de cada clase.

Los límites exactos son semejantes a los límites internacionales; por ejemplo, el límite norte de México es la orilla sur del río Bravo (o río Grande) del Norte y el límite sur de Estados Unidos de América es la orilla norte del mismo río, pero el límite exacto está a la mitad del río (figura 1). En el caso de dos casas vecinas, el límite nominal o práctico no incluye la barda de cada casa, aunque el límite exacto sí la considera (figura 2).

Los límites inferiores exactos de cada clase se calculan al restar la mitad de la diferencia entre el límite inferior de la clase siguiente y el límite superior de la clase; esto es, la mitad de la unidad de variación de los datos.

A su vez, los límites superiores exactos de cada clase se calculan al sumar la mitad de la diferencia entre el límite inferior de la clase siguiente y el límite superior de la clase; es decir, la mitad de la unidad de variación de los datos.

¿Sabías que...?

El análisis de datos permite identificar algunas características de estos, lo que ayuda al proceso de toma de decisiones. Por ejemplo, los datos de la tabla siguiente podrían indicar a qué grupo de edad ofrecer otros servicios o incentivos para reducir el número de socios morosos.

Tabla Análisis de datos de los socios del Club Deportivo Roca

Rango de edad en años	Número de socios	Socios puntuales	Visitas por semana
Menos de 18	27	15	2.6
De 18 a 24	43	31	3.7
De 25 a 35	162	140	2.9
De 36 a 55	115	108	1.2
De más de 55	68	65	1.8

OLC

A mayor abundamiento sobre los límites exactos, consulta los textos correspondientes en el OLC.

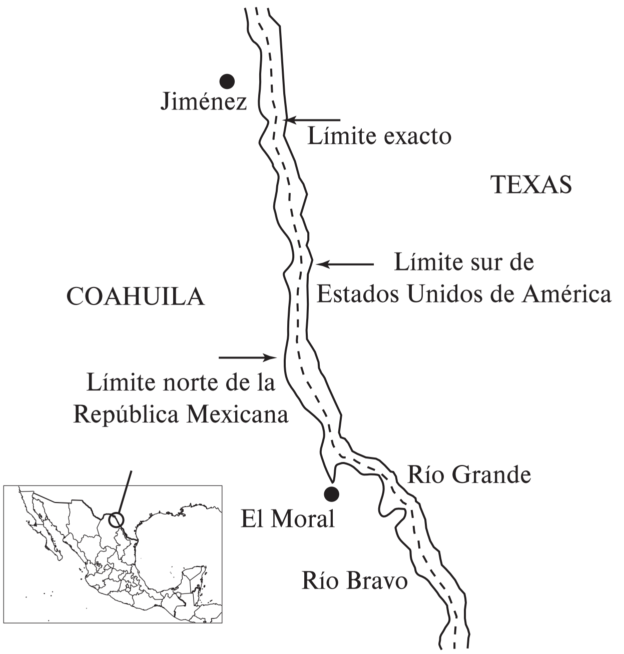


Figura 1 Límite exacto entre México y Estados Unidos de América.

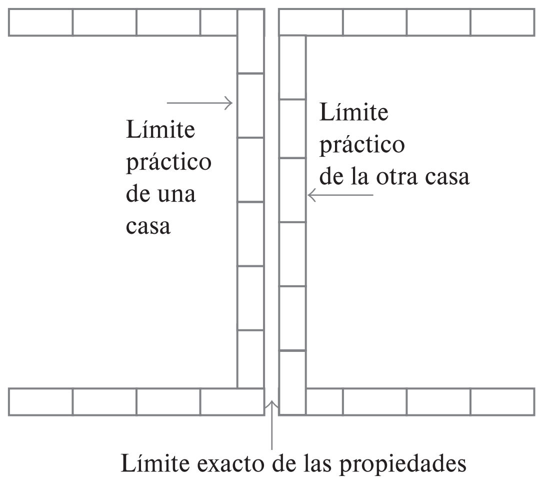


Figura 2 Límite exacto entre dos casas.

Observa que el límite superior exacto de una clase es igual al límite inferior exacto de la clase siguiente.

Por su parte, la *marca de clase* es el punto medio entre los límites de una clase (nominales o exactos). Se calcula al sumar el límite inferior y el superior de la clase y dividir el resultado entre dos.

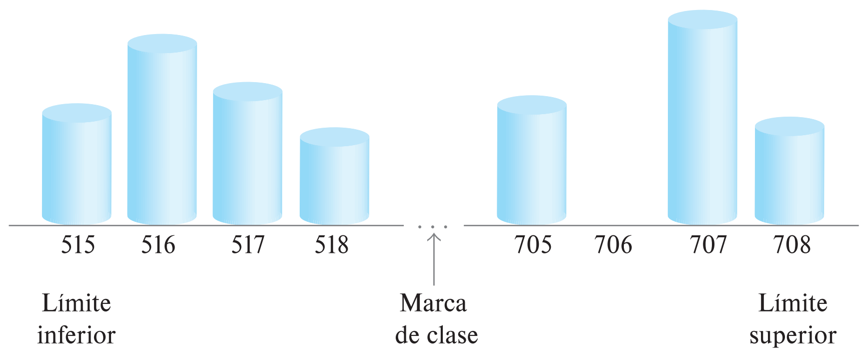
La marca de clase puede utilizarse, si no se tienen más datos, como el promedio estadístico de todos los valores incluidos en la clase (figura 3).

Cuando los intervalos son iguales (ancho uniforme), la distancia de una marca de clase a la siguiente (o a la anterior) es el ancho de la clase, por lo que la marca de clase puede obtenerse al sumar la mitad del ancho de clase con cada límite inferior exacto, es decir:

Fórmula para obtener la marca de clase

$$\text{Marca de la clase} = \text{Límite inferior exacto de la clase} + \frac{\text{Ancho de la clase}}{2}$$

Frecuencias individuales de los valores incluidos en la clase 515 a 708



$$\text{Marca de clase} = \frac{515 + 708}{2} = 611.5 \approx \text{Promedio estadístico de todos los valores incluidos en la clase}$$

Figura 3 Marca de clase.

EJEMPLO 5

Determina los límites exactos y la marca de clase de cada una de las clases de la tabla siguiente, en la que se presenta el peso (masa), en libras, de los niños de una escuela primaria en Los Ángeles, California. [*Nota:* Una libra (lb) equivale a 454 gramos (g)].

Clase	Límite inferior (lb)	Límite superior (lb)
A	101	115
B	116	130
C	131	145
D	146	160

Solución

La fórmula para calcular el límite inferior exacto de cada clase es la siguiente:

$$\text{Límite inferior exacto de la clase} = \text{Límite inferior de la clase} - \frac{\text{Límite inferior de la clase siguiente} - \text{Límite superior de la clase}}{2}$$

Nota: El límite inferior de la clase siguiente a la última es igual al límite superior de la última clase más la unidad de variación, en este ejemplo, $UV = 1$.

A 101 - 115
B 116 - 130
C 131 - 145
D 146 - 160
161

$$\text{Límite inferior exacto de la clase } A = 101 - \left(\frac{116-115}{2}\right) = 100.5$$

$$\text{Límite inferior exacto de la clase } B = 116 - \left(\frac{131-130}{2}\right) = 115.5$$

$$\text{Límite inferior exacto de la clase } C = 131 - \left(\frac{146-145}{2}\right) = 130.5$$

$$\text{Límite inferior exacto de la clase } D = 146 - \left(\frac{161-160}{2}\right) = 145.5$$

La fórmula para calcular el límite superior exacto de cada clase es la siguiente:

$$\begin{matrix}\text{Límite superior}\\ \text{exacto de la clase}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Límite superior}\\ \text{de la clase}\end{matrix} + \frac{\begin{matrix}\text{Límite inferior}\\ \text{de la clase siguiente}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{Límite superior}\\ \text{de la clase}\end{matrix}}{2}$$

$$\text{Límite superior exacto de la clase } A = 115 + \left(\frac{116-115}{2}\right) = 115.5$$

$$\text{Límite superior exacto de la clase } B = 130 + \left(\frac{131-130}{2}\right) = 130.5$$

$$\text{Límite superior exacto de la clase } C = 145 + \left(\frac{146-145}{2}\right) = 145.5$$

$$\text{Límite superior exacto de la clase } D = 160 + \left(\frac{161-160}{2}\right) = 160.5$$

La marca de cada clase puede obtenerse mediante esta fórmula:

$$\text{Marca de la clase} = \frac{\begin{matrix}\text{Límite inferior}\\ \text{de la clase}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{Límite superior}\\ \text{de la clase}\end{matrix}}{2}$$

Al hacer las sustituciones correspondientes se obtiene:

$$\text{Marca de la clase } A = \frac{101+115}{2} = 108$$

$$\text{Marca de la clase } B = \frac{116+130}{2} = 123$$

$$\text{Marca de la clase } C = \frac{131+145}{2} = 138$$

$$\text{Marca de la clase } D = \frac{146+160}{2} = 153$$

El resultado final es:

Clase	A	B	C	D
Límites nominales	101 — 115	116 — 130	131 — 145	146 — 160
Límites exactos	100.5 — 115.5	115.5 — 130.5	130.5 — 145.5	145.5 — 160.5
Marcas de clase	108	123	138	153

Clase	Límite inferior (lb)	Límite superior (lb)	Límite inferior exacto (lb)	Límite superior exacto (lb)	Marca de clase (lb)
A	101	115	100.5	115.5	108
B	116	130	115.5	130.5	123
C	131	145	130.5	145.5	138
D	146	160	145.5	160.5	153

EJEMPLO 6

Con base en la tabla de límites de clase siguiente, determina los límites exactos y la marca de cada clase.

Clase	Límite inferior (kg)	Límite superior (kg)
A	1 000	1 250
B	1 300	1 550
C	1 600	1 850
D	1 900	2 150

Solución

Para calcular el límite inferior exacto de cada clase se usa la fórmula:

$$\begin{matrix}\text{Límite inferior}\\ \text{exacto de la clase}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Límite inferior}\\ \text{de la clase}\end{matrix} - \frac{\begin{matrix}\text{Límite inferior}\\ \text{de la clase siguiente}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{Límite superior}\\ \text{de la clase}\end{matrix}}{2}$$

Nota: El límite inferior de la clase siguiente a la última es igual al límite superior de la última clase más la unidad de variación, en este ejemplo, $UV = 50$.

A 1 000 - 1 250
B 1 300 - 1 550
C 1 600 - 1 850
D 1 900 - 2 150
2 200

Límite inferior exacto de la clase $A = 1\,000 - \left(\frac{1300 - 1\,250}{2}\right) = 975$

Límite inferior exacto de la clase $B = 1\,300 - \left(\frac{1600 - 1\,550}{2}\right) = 1\,275$

$$\text{Límite inferior exacto de la clase } C = 1\,600 - \left(\frac{1\,900 - 1\,850}{2}\right) = 1\,575$$

$$\text{Límite inferior exacto de la clase } D = 1\,900 - \left(\frac{2\,200 - 2\,150}{2}\right) = 1\,875$$

Para calcular el límite superior exacto de cada clase:

$$\begin{array}{c}\text{Límite superior}\\ \text{exacto de la clase}\end{array} = \begin{array}{c}\text{Límite superior}\\ \text{de la clase}\end{array} + \frac{\begin{array}{c}\text{Límite inferior}\\ \text{de la clase siguiente}\end{array} - \begin{array}{c}\text{Límite superior}\\ \text{de la clase}\end{array}}{2}$$

$$\text{Límite superior exacto de la clase } A = 1\,250 + \left(\frac{1\,300 - 1\,250}{2}\right) = 1\,275$$

$$\text{Límite superior exacto de la clase } B = 1\,550 + \left(\frac{1\,600 - 1\,550}{2}\right) = 1\,575$$

$$\text{Límite superior exacto de la clase } C = 1\,850 + \left(\frac{1\,900 - 1\,850}{2}\right) = 1\,875$$

$$\text{Límite superior exacto de la clase } D = 2\,150 + \left(\frac{2\,100 - 2\,150}{2}\right) = 2\,175$$

La marca de cada clase puede obtenerse mediante la fórmula:

$$\text{Marca de la clase} = \frac{\begin{array}{c}\text{Límite inferior}\\ \text{de la clase}\end{array} + \begin{array}{c}\text{Límite superior}\\ \text{de la clase}\end{array}}{2}$$

Al hacer las sustituciones correspondientes se obtiene:

$$\text{Marca de la clase } A = \frac{1\,000 + 1\,250}{2} = 1\,125$$

$$\text{Marca de la clase } B = \frac{1\,300 + 1\,550}{2} = 1\,425$$

$$\text{Marca de la clase } C = \frac{1\,600 + 1\,850}{2} = 1\,725$$

$$\text{Marca de la clase } D = \frac{1\,900 + 2\,150}{2} = 2\,025$$

El resultado final es:

Clase	*A*	*B*	*C*	*D*
Límites nominales	1 000 —— 1 250	1 300 —— 1 550	1 600 —— 1 850	1 900 —— 2 150
Límites exactos	975 —— 1 275	—— 1 575	—— 1 875	—— 2 175
Marcas de clase	1 125	1 425	1 725	2 025

Clase	Límite inferior (kg)	Límite superior (kg)	Límite inferior exacto (kg)	Límite superior exacto (kg)	Marca de clase (kg)
A	1 000	1 250	975	1 275	1 125
B	1 300	1 550	1 275	1 575	1 425
C	1 600	1 850	1 575	1 875	1 725
D	1 900	2 150	1 875	2 175	2 025

EJEMPLO 7

Con base en la tabla de límites de clase siguiente, determina los límites exactos y la marca de cada clase.

Clase	Límite inferior	Límite superior
A	5.00	6.99
B	7.00	8.99
C	9.00	10.99
D	11.00	12.99

Solución

Para calcular el límite inferior exacto de cada clase se usa la fórmula:

$$\text{Límite inferior exacto de la clase} = \text{Límite inferior de la clase} - \frac{\text{Límite inferior de la clase siguiente} - \text{Límite superior de la clase}}{2}$$

Nota: El límite inferior de la clase siguiente a la última es igual al límite superior de la última clase más la unidad de variación, en este ejemplo, $UV = 0.01$.

A 5.00 - 6.99
B 7.00 - 8.99
C 9.00 - 10.99
D 11.00 - 12.99
13.00

Al hacer las sustituciones correspondientes se obtiene:

Límite inferior exacto de la clase $A = 5.00 - \left(\frac{7.00 - 6.99}{2}\right) = 4.995$

Límite inferior exacto de la clase $B = 7.00 - \left(\frac{9.00 - 8.99}{2}\right) = 6.995$

Límite inferior exacto de la clase $C = 9.00 - \left(\frac{11.00 - 10.99}{2}\right) = 8.995$

Límite inferior exacto de la clase $D = 11.00 - \left(\frac{13.00 - 12.99}{2}\right) = 10.995$

El límite superior exacto de cada clase se calcula con la fórmula:

$$\text{Límite superior exacto de la clase} = \text{Límite superior de la clase} + \frac{\text{Límite inferior de la clase siguiente} - \text{Límite superior de la clase}}{2}$$

Límite superior exacto de la clase $A = 6.99 + \left(\frac{7.00 - 6.99}{2}\right) = 6.995$

Límite superior exacto de la clase $B = 8.99 + \left(\frac{9.00 - 8.99}{2}\right) = 8.995$

Límite superior exacto de la clase $C = 10.99 + \left(\frac{11.00 - 10.99}{2}\right) = 10.995$

Límite superior exacto de la clase $D = 12.99 + \left(\frac{13.00 - 12.99}{2}\right) = 12.995$

La marca de cada clase puede obtenerse mediante la fórmula:

$$\text{Marca de la clase} = \frac{\begin{matrix}\text{Límite inferior}\\ \text{de la clase}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{Límite superior}\\ \text{de la clase}\end{matrix}}{2}$$

$$\text{Marca de la clase } A = \frac{5.00+6.99}{2} = 5.995$$

$$\text{Marca de la clase } B = \frac{7.00+8.99}{2} = 7.995$$

$$\text{Marca de la clase } C = \frac{9.00+10.99}{2} = 9.995$$

$$\text{Marca de la clase } D = \frac{11.00+12.99}{2} = 11.995$$

El resultado final es:

Clase		*A*	*B*	*C*	*D*
Límites nominales		5.00 — 6.99	7.00 — 8.99	9.00 — 10.99	11.00 — 12.99
Límites exactos	4.995	6.995	8.995	10.995	12.995
Marcas de clase		5.995	7.995	9.995	11.995

Clase	Límite inferior	Límite superior	Límite inferior exacto	Límite superior exacto	Marca de clase
A	5.00	6.99	4.995	6.995	5.995
B	7.00	8.99	6.995	8.995	7.995
C	9.00	10.99	8.995	10.995	9.995
D	11.00	12.99	10.995	12.995	11.995

Frecuencias relativas

La frecuencia relativa de una clase es la proporción de la frecuencia de esa clase respecto al total de frecuencias de la tabla. Por ejemplo, si la frecuencia de una clase es 315 y la frecuencia total es 14 596, la frecuencia relativa será 315/14 596 = 0.0216.

La frecuencia relativa también puede expresarse en porcentaje si se multiplica por 100 la frecuencia relativa en proporción. En este ejemplo será (0.0216)(100) = 2.16%.

EJEMPLO 8

Supón que la tabla siguiente representa las estaturas de la población adulta de una región. Tabula la frecuencia relativa de cada clase, tanto en proporción como en porcentaje.

Clase	Límite inferior (m)	Límite superior (m)	Frecuencia (habitantes)
A	–	1.20	315
B	1.21	1.50	2 824
C	1.51	1.70	9 087
D	1.71	1.80	1 618
E	1.81	–	752

Solución

La frecuencia relativa se calcula de la forma siguiente:

$$\text{Frecuencia relativa de la clase (en proporción)} = \frac{\text{Frecuencia de la clase}}{\text{Frecuencia total}}$$

Fórmulas de la frecuencia relativa de clase y de la frecuencia total

$$\text{Frecuencia total} = \text{Suma (cada frecuencia)} = \text{Total de frecuencias}$$

Al hacer las sustituciones correspondientes se obtiene:

$$\begin{aligned}\text{Frecuencia total} &= 315 + 2\,824 + 9\,087 + 752 \\ &= 14\,596\end{aligned}$$

$$\text{Frecuencia relativa de la clase } A = \frac{315}{14\,596} = 0.0216$$

$$\text{Frecuencia relativa de la clase } B = \frac{2\,824}{14\,596} = 0.1935$$

$$\text{Frecuencia relativa de la clase } C = \frac{9\,087}{14\,596} = 0.6226$$

$$\text{Frecuencia relativa de la clase } D = \frac{1\,618}{14\,596} = 0.1108$$

$$\text{Frecuencia relativa de la clase } E = \frac{752}{14\,596} = 0.0515$$

$$\begin{array}{c}\text{Frecuencia relativa} \\ \text{de la clase (en porcentaje)}\end{array} = \begin{array}{c}\text{Frecuencia relativa} \\ \text{de la clase (en proporción)}\end{array} \cdot 100$$

Fórmula de la frecuencia relativa de la clase, en porcentaje

$$\text{Frecuencia relativa de la clase } A = 0.0216 \cdot 100 = 2.16\%$$
$$\text{Frecuencia relativa de la clase } B = 0.1935 \cdot 100 = 19.35\%$$
$$\text{Frecuencia relativa de la clase } C = 0.6226 \cdot 100 = 62.26\%$$
$$\text{Frecuencia relativa de la clase } D = 0.1108 \cdot 100 = 11.08\%$$
$$\text{Frecuencia relativa de la clase } E = 0.0515 \cdot 100 = 5.15\%$$

EJEMPLO 9

La frecuencia relativa de un grupo de datos puede utilizarse para conocer en forma aproximada la frecuencia que tendría otro grupo de datos semejantes. Supón que los 14 596 habitantes adultos de una región tienen la distribución de estaturas que se muestra a continuación:

Clase	Límite inferior (m)	Límite superior (m)	Frecuencia absoluta (habitantes)	Frecuencia relativa
A	–	1.20	315	0.0216
B	1.21	1.50	2 824	0.1935
C	1.51	1.70	9 087	0.6226
D	1.71	1.80	1 618	0.1108
E	1.81	–	752	0.0515
Sumas			14 596	1.0000

Calcula aproximadamente la distribución de estaturas, si la población fuera de 104 246 habitantes.

Solución

Al multiplicar la frecuencia relativa de cada clase por la frecuencia total se obtiene la frecuencia de cada clase. Esto se presenta enseguida:

$$\text{Frecuencia de la clase} = (\text{Frecuencia relativa}) \cdot (\text{Frecuencia total})$$

Frecuencia $A = 0.0216 \cdot 104\,246 = 2\,252$

Frecuencia $B = 0.1935 \cdot 104\,246 = 20\,172$

Frecuencia $C = 0.6226 \cdot 104\,246 = 64\,903$

Frecuencia $D = 0.1108 \cdot 104\,246 = 11\,500$

Frecuencia $E = 0.0515 \cdot 104\,246 = 5\,369$

Clase	Límite inferior (m)	Límite superior (m)	Frecuencia absoluta (habitantes)	Frecuencia relativa
A	–	1.20	2 252	0.0216
B	1.21	1.50	20 172	0.1935
C	1.51	1.70	64 903	0.6226
D	1.71	1.80	11 550	0.1108
E	1.81	–	5 369	0.0515
Sumas			104 246	1.0000

Casos de la vida real

En ocasiones, la aplicación de las distribuciones de frecuencias presenta puntos débiles que deben evitarse, o por lo menos tenerse en cuenta. Considera estos ejemplos.

- Por 50 fotocopias se cobran (50) · ($0.20) = $10.00, pero por 51 solo (51)($0.18) = $9.18. Para evitar esta situación se pueden definir otros límites o precios unitarios; se puede cobrar, para un volumen grande (50) · ($0.20) = $10.00 por las primeras 50 copias, $0.18 por cada una de las siguientes copias y $0.17 por cada fotocopia de la 101 en adelante.

Fotocopias	
Número	**($)**
1 - 50	0.20 c/u
51 - 100	0.18 c/u
101 -	0.17 c/u

- Si se consumen 15 metros cúbicos (m^3) de agua potable, la cuota a pagar será de $18.00. Por un consumo de 16 m^3, ¿cuánto debe pagarse? Si es $20.80 ($1.30 · 16), el costo individual del último metro cúbico resulta ser de $2.80 ($20.80 – $18.00). Una alternativa podría consistir en establecer una cuota mínima de $18.00 para los primeros 15 m^3, más $1.30 por cada uno de los siguientes m^3, hasta 25 (en este caso sería $19.30, esto es, $18.00 + $1.30 · 1), más $1.50 por cada uno de los siguientes m^3, hasta 40, más $1.80 por cada uno de los siguientes metros cúbicos.

Tarifas de agua potable	
Consumo mensual m^3	Cuota ($)
0 - 15	18.00
16 - 25	1.30 c/u
26 - 40	1.50 c/u
41 -	1.80 c/u

Presentaciones gráficas

Una gráfica vale más que mil palabras, dice el refrán. Esto resulta particularmente cierto en el caso de los análisis estadísticos, donde los datos al natural e incluso tabulados pueden ser difíciles de comprender.

Las gráficas estadísticas más comunes son las siguientes:

- El histograma y el polígono de frecuencias.
- La curva de frecuencia.
- Las gráficas de barras de dos variables.
- Las gráficas de frecuencias acumuladas u ojivas.
- Las gráficas de pastel.

Todas ellas se detallan en las páginas siguientes.

OLC

Si te interesa conocer otros casos de la vida real, consulta el material relativo a números de páginas que se halla en el OLC.

Histograma y polígono de frecuencias

Un histograma es un diagrama de barras que representa, a escala, el número de elementos que incluye cada una de las clases de una distribución de frecuencias. La altura de las barras del histograma queda determinada por la frecuencia de la clase, en tanto que los límites horizontales son los límites exactos de cada clase, aunque a veces los límites horizontales que se emplean son los nominales. Así, las barras quedan separadas entre sí, para lograr un efecto visual de individualidad de las clases.

El polígono de frecuencias es una figura cerrada delimitada en su base por el eje horizontal, y cuyos vértices son los puntos centrales de la horizontal superior de cada barra del histograma, incluidas también la clase anterior a la primera y la clase siguiente a la última.

EJEMPLO 10

Grafica el histograma (o diagrama de barras) y el polígono de frecuencias correspondiente a la tabla siguiente:

Clase	Límite inferior	Límite superior	Límite inferior exacto	Límite superior exacto	Marca	Frecuencia
A	500	699	499.5	699.5	599.5	4
B	700	899	699.5	899.5	799.5	7
C	900	1 099	899.5	1 099.5	999.5	5
D	1 100	1 299	1 099.5	1 299.5	1 119.5	2
E	1 300	1 499	1 299.5	1 499.5	1 399.5	4

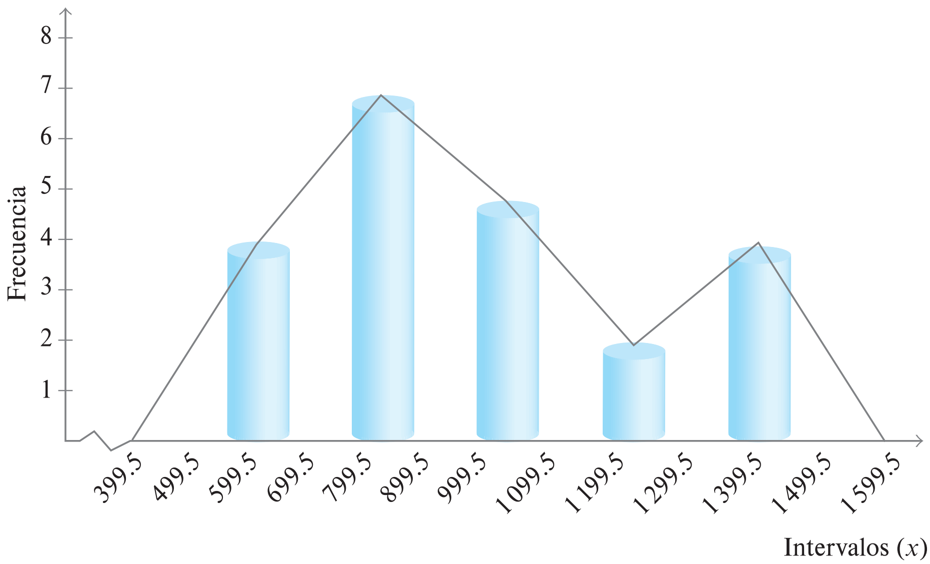
Solución

El primer punto por considerar es la medida que representará cada unidad. En este caso podría definirse 1 centímetro (cm) de altura por cada unidad de frecuencia y 1 cm de ancho por cada 100 unidades de límites.

Como los intervalos son uniformes, el ancho de clase (799.5 – 599.5 = 200) permite identificar el punto medio de la clase anterior a la primera (599.5 – 200 = 399.5), y el punto medio de la clase siguiente a la última (1 399.5 + 200 = 1 599.5), tal como se muestra en la tabla siguiente.

Anterior	399.5
Clase	**Marca**
A	599.5
B	799.5
C	999.5
D	1 199.5
E	1 399.5
Siguiente	1 599.5

El resultado se presenta enseguida:



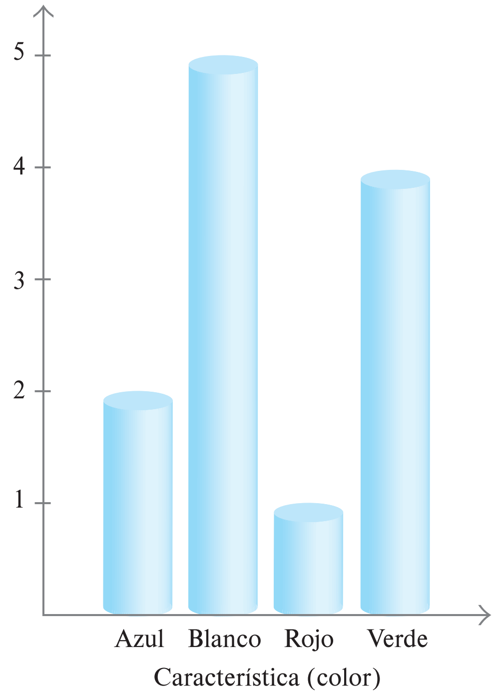
EJEMPLO 11

Elabora un diagrama de barras para presentar los datos siguientes, relativos al color de los automóviles vendidos recientemente por una distribuidora: azul, blanco, verde, azul, verde, blanco, rojo, verde, blanco, verde, blanco.

Solución

La clasificación de los datos da como resultado la tabla siguiente, con la que se elabora el diagrama correspondiente:

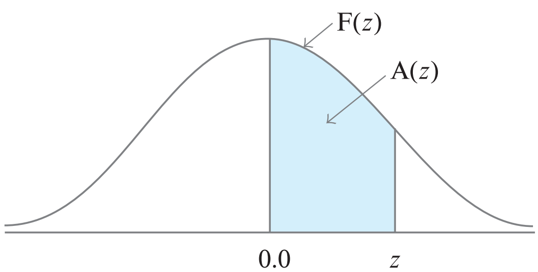
Color	Azul	Blanco	Rojo	Verde	Total
Número	2	5	1	4	12



Curva de frecuencias

La curva de frecuencias es una curva suavizada, que sigue el perfil señalado por el polígono de frecuencias.

Su utilidad consiste en mostrar gráficamente la tendencia de la distribución de frecuencias y que, expresado por medio de una fórmula matemática, facilita el estudio de su comportamiento. Por ejemplo, considera la curva de la distribución normal estandarizada que se muestra en el esquema siguiente:

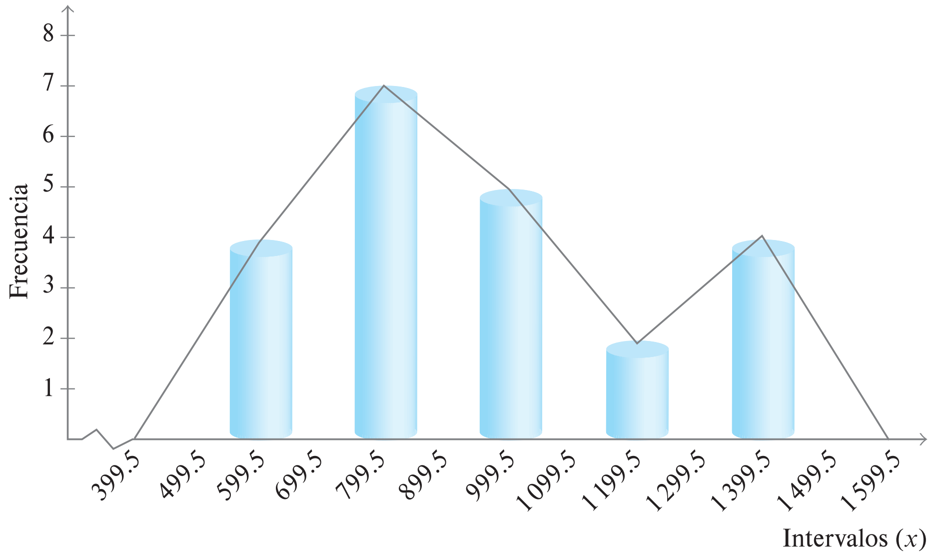


$$z = \frac{\text{Valor} - \text{Media}}{\text{Desviación estándar}}$$

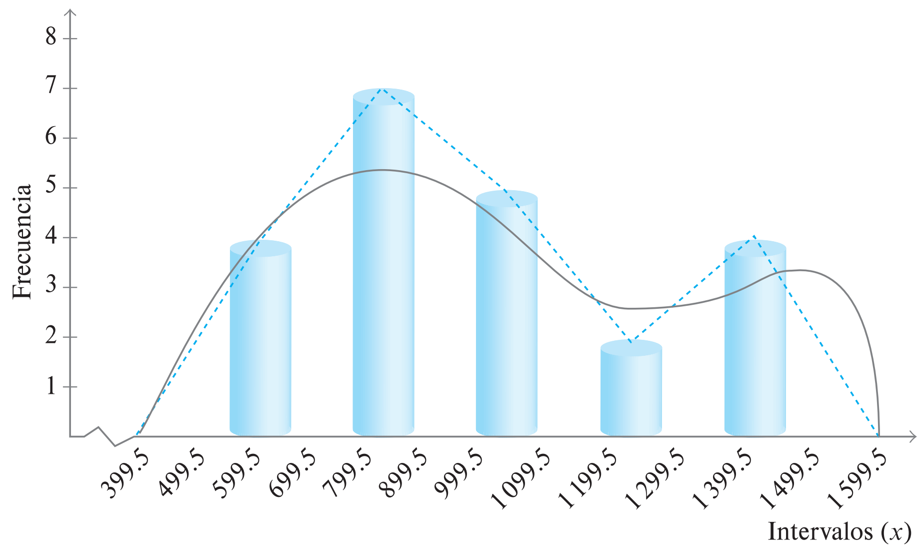
$$A(z) = \int \frac{0.3989422804\, dz}{2.7182818285^{0.5z^2}}$$

EJEMPLO 12

Con base en el histograma y el polígono de frecuencias presentados a continuación, grafica la curva de frecuencias correspondiente.



Solución



Gráficas de barras de dos variables

Una variante de los histogramas son las gráficas de barras de dos variables. En ellas se grafican los valores para presentar visualmente el comportamiento de una de ellas respecto a la otra, y obtener así conclusiones inmediatas, que no son evidentes o fáciles de identificar en los datos originales.

Para elaborar una gráfica de este tipo se seleccionan, en uno de los ejes (por ejemplo, el vertical), las dos variables que se desea analizar (por ejemplo, el grosor y la resistencia de una viga) y, en el otro eje, se grafica la variable que las relaciona (por ejemplo, los diferentes proveedores de las vigas analizadas).

Enseguida hay que elegir una escala adecuada para una de las variables, y la escala equivalente para la otra variable, de manera que la primera pareja de barras tenga el mismo tamaño.

A continuación se debe calcular el tamaño de las barras restantes y graficarlas.

EJEMPLO 13

En la tabla siguiente se presenta el número de unidades producidas y el monto de costos indirectos. Traza una gráfica de barras para presentar esta información.

Mes	Enero	Febrero	Marzo	Abril
Unidades	635	785	695	583
Costos ($)	10.20	11.50	10.80	10.40

Solución

El primer paso consiste en seleccionar los ejes: el horizontal podría ser para los meses y el vertical tanto para las unidades de producción como para los costos. En este caso podría elegirse una escala de 1 centímetro (cm) por cada 100 unidades producidas, por lo que 635 unidades serían:

$$\frac{635 \text{ unidades}}{100 \text{ unidades por cm}} = 6.35 \text{ cm}$$

El eje de los costos debe tener, en este caso, 6.35 cm para representar los costos del mes de enero, por lo que la escala de costos sería:

$$\frac{\$10.20}{6.35 \text{ cm}} = \$1.6063 \text{ por cm}$$

Las barras que representan los costos indirectos deben tener el tamaño que se calcula a continuación:

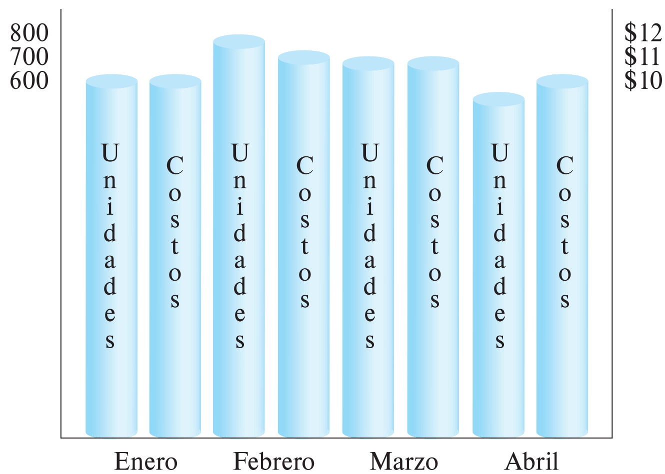
$$\text{Tamaño de la barra} = \frac{\text{Costo indirecto}}{\text{Escala equivalente}}$$

Tamaño de la barra de enero: $\frac{\$10.20}{\$1.6063/\text{cm}} = 6.35 \text{ cm}$

Tamaño de la barra de febrero: $\frac{\$11.50}{\$1.6063/\text{cm}} = 7.16 \text{ cm}$

Tamaño de la barra de marzo: $\frac{\$10.80}{\$1.6063/\text{cm}} = 6.72 \text{ cm}$

Tamaño de la barra de abril: $\frac{\$10.40}{\$1.6063/\text{cm}} = 6.47 \text{ cm}$



Ahora se observa con claridad cuál de las dos variables tuvo mayor crecimiento respecto a la otra; por ejemplo, en febrero la producción fue mayor respecto a enero que los costos.

Graficación de frecuencias acumuladas

Las frecuencias acumuladas son parte importante de una tabla de distribución de frecuencias, pues presentan las sumas parciales de todas las frecuencias, con lo que permiten contestar preguntas como “¿cuántos elementos de la población o muestra en estudio tienen menos de (o más de) cierto nivel de la variable que se analiza?”, o “¿qué porcentaje de la frecuencia total corresponde a los que tienen menos de (o más de) cierta cantidad?”.

Además de la información directa que ofrecen las frecuencias acumuladas de una tabla, las gráficas que se generan con ellas contribuyen a comprender la información que contienen y, cuando se elaboran cuidadosamente, permiten obtener valores numéricos no visibles en la tabla de distribución de frecuencias.

La frecuencia acumulada define los puntos de la gráfica u ojiva ascendente. A esta se le conoce también como *ojiva menos que,* ya que sus puntos responden las preguntas del tipo “¿cuántos elementos de la población o muestra en estudio tienen menos de cierto nivel de la variable que se analiza?”, o “¿qué porcentaje de la frecuencia total corresponde a los que tienen menos de cierta cantidad?”.

La frecuencia complementaria indica el complemento o lo que le falta a la frecuencia acumulada, y define los puntos de la gráfica u ojiva descendente. Esta gráfica se llama también *ojiva más que*.

La frecuencia acumulada de una clase se calcula sumando la frecuencia de esa clase con la frecuencia acumulada de la clase anterior (la frecuencia acumulada de la primera clase es la frecuencia de esa clase, y la frecuencia acumulada de la última clase es el total de frecuencias).

La frecuencia complementaria de una clase se calcula restando la frecuencia acumulada de la clase a la frecuencia total. La frecuencia complementaria de la última clase es cero, y para cada clase, la suma de la frecuencia acumulada y la frecuencia complementaria es igual al total de frecuencias de la tabla.

Las frecuencias acumuladas también pueden calcularse siguiendo este procedimiento gráfico:

Clase	Frecuencia	Frecuencia acumulada
A	fa	fa
B	fb	$fa + faa$
C	fc	$fc + fab$
D	fd	$fd + fac$
E	fe	$fe + fad$

Clase	Frecuencia	Frecuencia complementaria
A	fa	$fcb + fb$
B	fb	$fcc + fc$
C	fc	$fcd + fd$
D	fd	fe
E	fe	0

En todos los casos anteriores:
fx = Frecuencia simple de la clase x
fax = Frecuencia acumulada de la clase x
fcx = Frecuencia complementaria de la clase x

Para graficar la ojiva “menos que” se utilizan los límites superiores exactos de cada clase y el valor de la frecuencia acumulada. También deben incluirse en la gráfica el límite inferior exacto de la primera clase, con un valor de cero para la frecuencia acumulada. Para graficar la ojiva “más que” se utilizan los límites superiores exactos de cada clase y el valor de la frecuencia complementaria. También debe incluirse en la gráfica el límite inferior exacto de la primera clase, con un valor igual al total de frecuencias para la frecuencia acumulada.

Es importante señalar que el último valor de una frecuencia acumulada es la frecuencia total (1.0 o 100%, si es frecuencia relativa). El último valor de la frecuencia complementaria es siempre cero. La suma de la frecuencia acumulada y la frecuencia complementaria de cada clase es siempre la frecuencia total (1.0 o 100%, si es frecuencia relativa).

EJEMPLO 14

Con base en la tabla de frecuencias absolutas siguiente, determina y grafica la frecuencia acumulada y la complementaria:

Clase	Límite inferior	Límite superior	Límite inferior exacto	Límite superior exacto	Marca	Frecuencia
A	40	59	39.5	59.5	49.5	385
B	60	79	59.5	79.5	69.5	292
C	80	99	79.5	99.5	89.5	475
D	100	119	99.5	119.5	109.5	129
E	120	139	119.5	139.5	129.5	48

Solución

Frecuencia acumulada (ojiva “menos que”):

$$\begin{matrix}\text{Frecuencia acumulada} \\ \text{de la clase}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Frecuencia acumulada} \\ \text{de la clase anterior}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{Frecuencia} \\ \text{de la clase}\end{matrix}$$

Frecuencia acumulada de la primera clase = Frecuencia de la primera clase

Frecuencia acumulada de la clase $A = 385$

Frecuencia acumulada de la clase $B = 385 + 292 = 677$

Frecuencia acumulada de la clase $C = 677 + 475 = 1152$

Frecuencia acumulada de la clase $D = 1152 + 129 = 1\,281$

Frecuencia acumulada de la clase $E = 1\,281 + 48 = 1\,329$

Frecuencia complementaria (ojiva “más que”):

$$\begin{matrix}\text{Frecuencia complementaria} \\ \text{de la clase}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Frecuencia} \\ \text{total}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{Frecuencia acumulada} \\ \text{de la clase}\end{matrix}$$

Frecuencia complementaria de la clase $A = 1\,329 - 385 = 944$

Frecuencia complementaria de la clase $B = 1\,329 - 677 = 652$

Frecuencia complementaria de la clase $C = 1\,329 - 1152 = 177$

Frecuencia complementaria de la clase $D = 1\,329 - 1\,281 = 48$

Frecuencia complementaria de la clase $E = 1\,329 - 1\,329 = 0$

El cálculo anterior puede también hacerse como sigue:

Clase	Frecuencia	Frecuencia acumulada
A	385	385
B	292	677
C	475	1 152
D	129	1 281
E	48	1 329

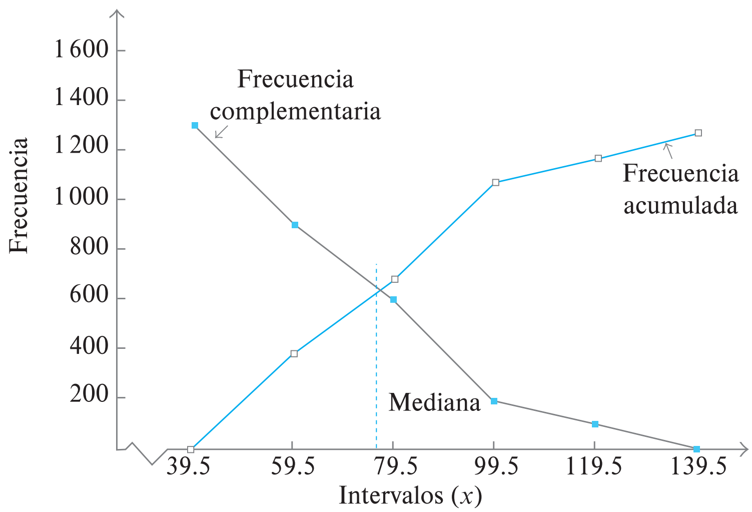
Clase	Frecuencia	Frecuencia complementaria
A	385	944
B	292	652
C	475	177
D	129	48
E	48	0

Resultado final: en la tabla siguiente se presentan los valores obtenidos:

Clase	Límite inferior exacto	Límite superior exacto	Frecuencia	Frecuencia acumulada	Frecuencia complementaria
A	39.5	59.5	385	385	944
B	59.5	79.5	292	677	652
C	79.5	99.5	475	1 152	177
D	99.5	119.5	129	1 281	48
E	119.5	139.5	48	1 329	0
Totales			1 329		

En la gráfica siguiente se muestra la frecuencia acumulada (ojiva "menos que") y la complementaria (ojiva "más que").

Observa que el cruce de las curvas define la *mediana*, concepto que se estudiará en el próximo capítulo.



EJEMPLO 15

Con base en la tabla de frecuencias relativas siguiente, determina la frecuencia acumulada y la complementaria:

Clase	Límite inferior (m)	Límite superior (m)	Frecuencia relativa
A	–	1.20	0.0216
B	1.21	1.50	0.1935
C	1.51	1.70	0.6226
D	1.71	1.80	0.1108
E	1.81	–	0.0515

Solución

Frecuencia acumulada (ojiva "menos que"):

$$\begin{array}{c}\text{Frecuencia acumulada}\\ \text{de la clase}\end{array} = \begin{array}{c}\text{Frecuencia acumulada}\\ \text{de la clase anterior}\end{array} + \begin{array}{c}\text{Frecuencia}\\ \text{de la clase}\end{array}$$

Frecuencia acumulada de la primera clase = Frecuencia de la primera clase

Frecuencia acumulada de la clase $A = 0.0216$

Frecuencia acumulada de la clase $B = 0.0216 + 0.1935 = 0.2151$

Frecuencia acumulada de la clase $C = 0.2151 + 0.6226 = 0.8377$

Frecuencia acumulada de la clase $D = 0.8377 + 0.1108 = 0.9485$

Frecuencia acumulada de la clase $E = 0.9485 + 0.0515 = 1.0000$

Frecuencia complementaria (ojiva "más que"):

$$\begin{array}{c}\text{Frecuencia complementaria}\\ \text{de la clase}\end{array} = \begin{array}{c}\text{Frecuencia}\\ \text{total}\end{array} - \begin{array}{c}\text{Frecuencia acumulada}\\ \text{de la clase}\end{array}$$

Frecuencia acumulada de la clase $A = 1.0000 - 0.0216 = 0.9784$

Frecuencia acumulada de la clase $B = 1.0000 - 0.2151 = 0.7849$

Frecuencia acumulada de la clase $C = 1.0000 - 0.8377 = 0.1623$

Frecuencia acumulada de la clase $D = 1.0000 - 0.9485 = 0.0515$

Frecuencia acumulada de la clase $E = 1.0000 - 1.0000 = 0.0000$

El cálculo anterior puede también hacerse como sigue:

Clase	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
A	0.0216	0.0216
B	0.1935	0.2151
C	0.6226	0.8377
D	0.1108	0.9485
E	0.0515	1.0000

Clase	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa complementaria
A	0.0216	0.9784
B	0.1935	0.7849
C	0.6226	0.1623
D	0.1108	0.0515
E	0.0515	0.0000

Resultado final: en la tabla siguiente se presentan los valores obtenidos:

Clase	Límite inferior (metros)	Límite superior (metros)	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada	Frecuencia relativa complementaria
A	–	1.20	0.0216	0.0216	0.9784
B	1.21	1.50	0.1935	0.2151	0.7849
C	1.51	1.70	0.6226	0.8377	0.1623
D	1.71	1.80	0.1108	0.9485	0.0515
E	1.81	–	0.0525	1.0000	0.0000
Totales			1.0000		

OLC

Si quieres ver cómo se pueden aplicar las frecuencias acumuladas en la operación de sistemas de agua potable, en la administración de bodegas y en la planeación financiera, puedes consultar las secciones correspondientes en el OLC.

Gráficas de pastel

Las gráficas de pastel o gráficas circulares representan, por medio de segmentos de círculo, la frecuencia absoluta o relativa de una tabla de distribución de frecuencias.

La presentación de datos en esta forma es impresionante, sobre todo cuando se le añaden efectos visuales como color y grosor a los segmentos, o se separa alguno de ellos del centro.

Estas gráficas se preparan con base en el ángulo que resulta de multiplicar 360 (los grados de un círculo) por la frecuencia relativa (*frecuencia de la clase/total de frecuencias*) de cada clase, de manera que su cálculo es muy sencillo.

EJEMPLO 16

Prepara una gráfica de pastel para los datos agrupados que se muestran en la tabla siguiente:

Clase	Límite inferior	Límite superior	Frecuencia
A	500	699	2
B	700	899	7
C	900	1 099	4
D	1 100	1 299	5
E	1 300	1 499	3

Solución

Los valores para la gráfica se calculan mediante estas fórmulas:

$$\text{Ángulo de la clase} = 360 \cdot \left(\frac{\text{Frecuencia de la clase}}{\text{Total de frecuencias}}\right)$$

$$\text{Total de frecuencias} = \text{Suma (cada frecuencia)}$$

Al hacer las sustituciones respectivas queda

$$\text{Total de frecuencias} = \text{Suma } (2 + 7 + 4 + 5 + 3) = 21$$

$$\text{Ángulo de la clase } A = 360 \cdot (2/21) = 34.3°$$

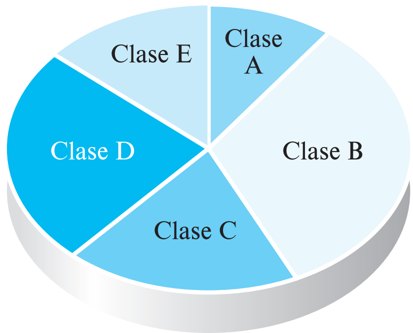
$$\text{Ángulo de la clase } B = 360 \cdot (7/21) = 120.0°$$

Ángulo de la clase $C = 360 \cdot (4/21) = 68.6°$

Ángulo de la clase $D = 360 \cdot (5/21) = 85.7°$

Ángulo de la clase $E = 360 \cdot (3/21) = 51.4°$

Resultado final:



EJEMPLO 17

Traza una gráfica de pastel para representar los datos siguientes, relativos al color de los automóviles vendidos recientemente por una distribuidora: azul, blanco, verde, azul, verde, blanco, rojo, verde, blanco, blanco, verde, blanco.

Solución

La clasificación de los datos produce la tabla siguiente, con la que se elabora la gráfica respectiva:

Color	Azul	Blanco	Rojo	Verde	Total
Número	2	5	1	4	12

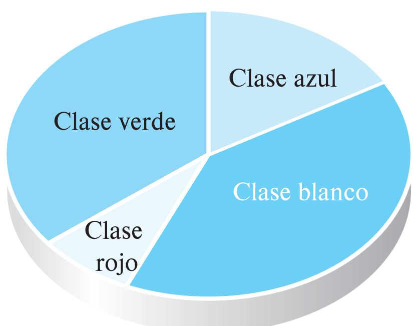
$$\text{Ángulo de la clase} = 360 \cdot \left(\frac{\text{Frecuencia de la clase}}{\text{Total de frecuencias}}\right)$$

$$\text{Ángulo de la clase azul} = 360 \cdot (2/12) = 60°$$

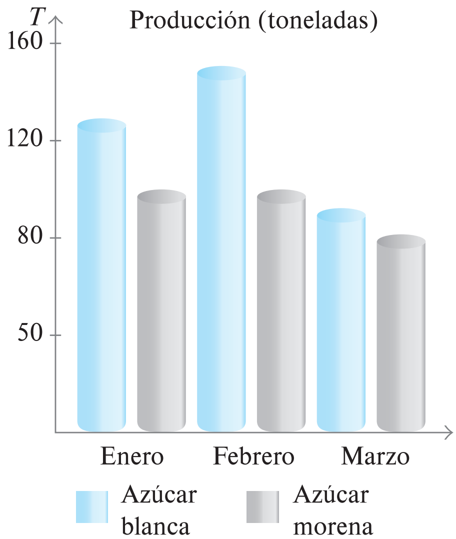
$$\text{Ángulo de la clase blanco} = 360 \cdot (5/12) = 150°$$

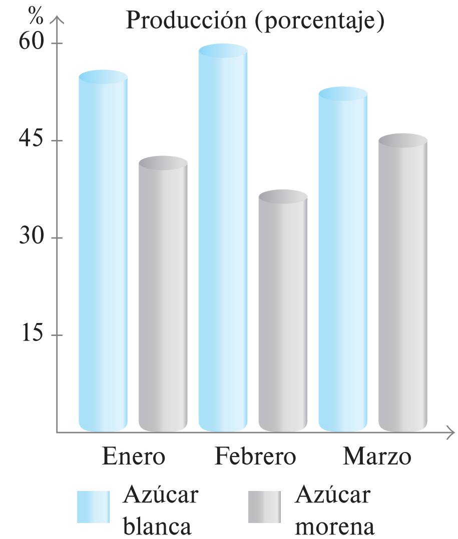
$$\text{Ángulo de la clase rojo} = 360 \cdot (1/12) = 30°$$

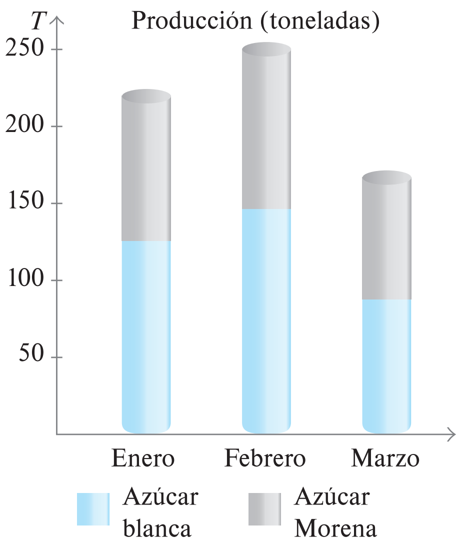
$$\text{Ángulo de la clase verde} = 360 \cdot (4/12) = 120°$$

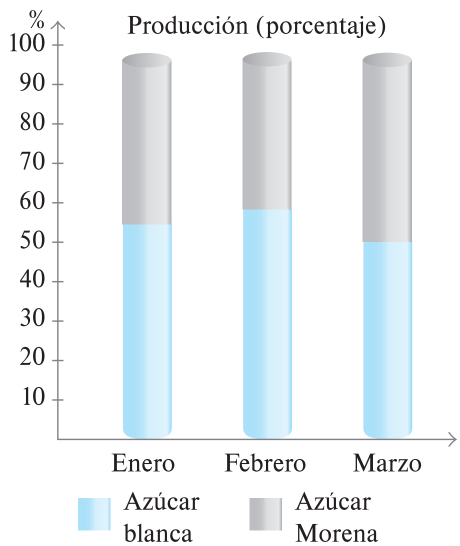


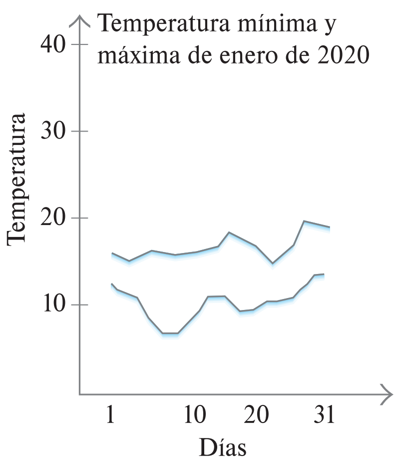
Otros tipos de gráficas

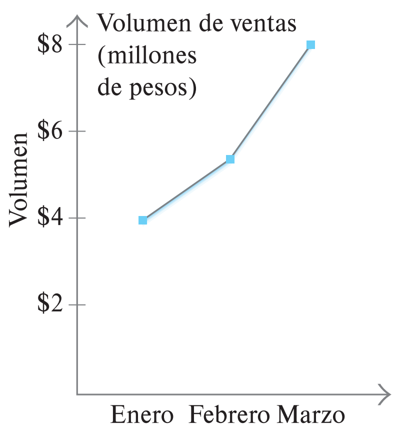












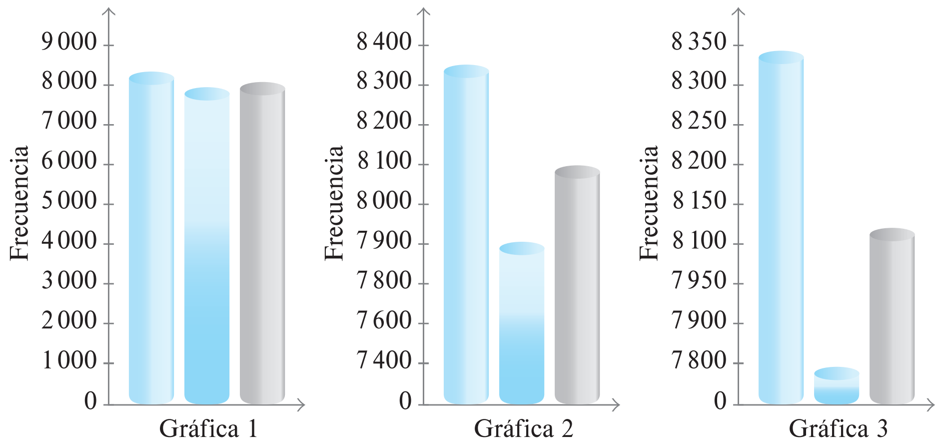
¿Sabías que...?

Para gráficas rectangulares se puede usar la proporción áurea, en donde un lado es x y el otro lado es $x/2 \cdot (1+\sqrt{5})$, o sea, 1.618 x. Por ejemplo, si $x = 5$, el otro lado será 8.09, u 8, si se desea facilitar el trabajo.

Las gráficas rectangulares y otras se presentan en los anexos que puedes ver en OLC.

¿Verdad, mentira o ilusión óptica?

Las gráficas estadísticas deben facilitar el entendimiento de los resultados que se presentan, pero en ocasiones se elaboran con la intención de resaltar algún punto, o francamente con el afán de engañar. Juzga las gráficas siguientes, preparadas a partir de los mismos datos, pero con escalas diferentes.



Aplicaciones gráficas y numéricas

Las gráficas de las frecuencias acumuladas y complementarias ofrecen información no visible originalmente: cualquiera de sus puntos indica la relación entre un valor del eje horizontal (donde se marcan los límites) y su correspondiente valor en el eje vertical (donde se asientan las frecuencias). De esta manera es posible determinar en forma gráfica, con la aproximación que permita el dibujo, la frecuencia que corresponde a cierto límite, o el límite que corresponde a cierta frecuencia.

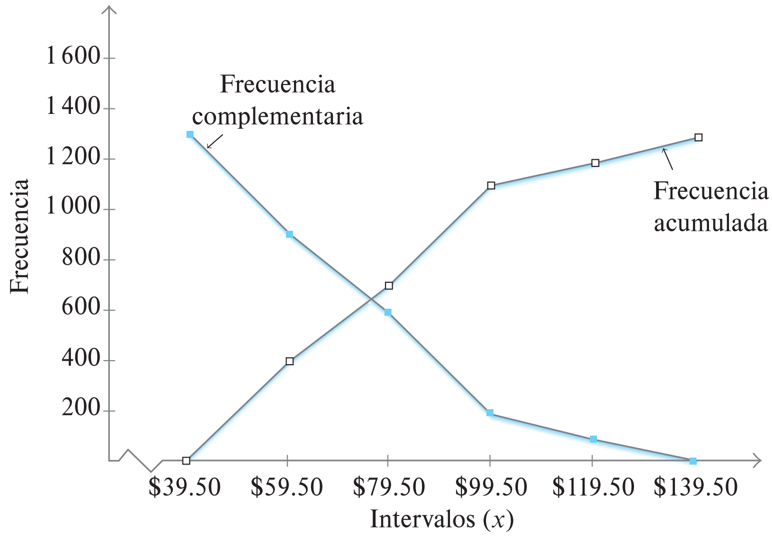
Las frecuencias acumulada y complementaria pueden utilizarse también numéricamente para determinar en forma aproximada la frecuencia que corresponde a cierto límite, o el límite que corresponde a cierta frecuencia, con lo que se obtiene mayor beneficio de los datos asentados en la distribución de frecuencias.

Interpretación de las ojivas

La ojiva “menos que” presenta la relación entre un límite cualquiera y los elementos que tienen menos de ese límite. De manera similar ocurre con la ojiva “más que”.

EJEMPLO 18

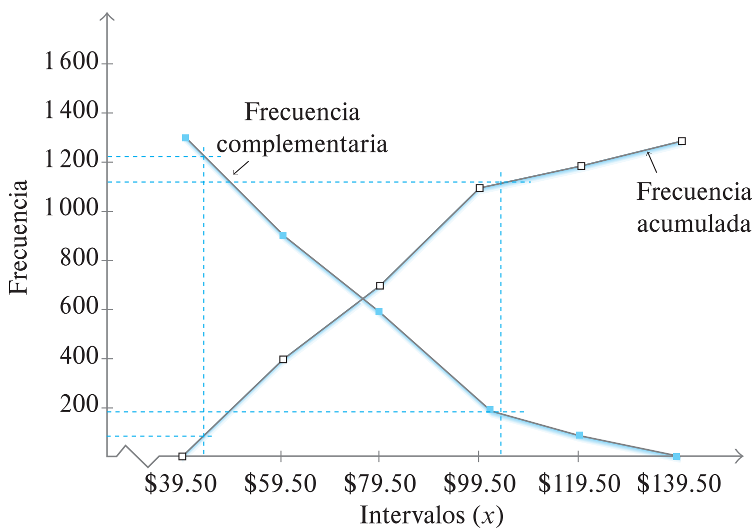
Con base en la gráfica siguiente, determina de manera aproximada el número de personas que corresponden a los límites $45.00 y $105.00.



Solución

Los límites pedidos están marcados en la figura siguiente, donde se observa también que la frecuencia acumulada para $45.00 es aproximadamente 120; es decir, hay 120 personas que tienen menos de $45.00. Asimismo, con base en la frecuencia complementaria puede afirmarse que hay cerca de 1 200 personas que tienen más de $45.00.

Al límite $105.00 corresponde una frecuencia acumulada de casi 1 180; es decir, hay 1 180 personas que tienen menos de $105.00. La frecuencia complementaria indica que hay alrededor de 140 personas que tienen más de $105.00.



Aplicación numérica de las frecuencias acumuladas

La frecuencia acumulada de cada clase señala cuántos elementos de la distribución de frecuencias están incluidos desde el límite inferior de la primera clase hasta el límite superior de la clase. Esto equivale a decir cuántos elementos tienen menos de, o cuando mucho, hasta el límite superior de la clase.

La frecuencia complementaria de cada clase indica cuántos elementos tienen más que el límite superior de esa clase; es decir, desde el límite inferior de la clase siguiente hasta el límite superior de la última clase.

El manejo numérico de las frecuencias acumuladas permite también determinar el número de elementos que se encuentran incluidos en dos o más clases de la distribución de frecuencias.

EJEMPLO 19

Supón que la tabla siguiente representa las estaturas de la población adulta de una región. Determina cuántos habitantes miden:

a) Más de 1.70 metros (m)
b) 1.50 m o menos
c) Entre 1.21 y 1.80 m

Clase	Límite inferior (m)	Límite superior (m)	Frecuencia (habitantes)	Frecuencia acumulada (habitantes)	Frecuencia complementaria (habitantes)
A	–	1.20	315	315	14 281
B	1.21	1.50	2 824	3 139	11 457
C	1.51	1.70	9 087	12 226	2 370
D	1.71	1.80	1 618	13 844	752
E	1.81	–	752	14 596	0

Solución

a) La frecuencia complementaria muestra cuántos habitantes miden más de 1.70 m. En la tabla se observa la respuesta: 2 370 habitantes. Esto equivale a sumar la frecuencia de las clases *D* y *E*.
b) La frecuencia acumulada muestra el número de habitantes que miden 1.50 m o menos. De la tabla se obtiene el resultado: 3 139 habitantes, que es la suma de las frecuencias de las clases *A* y *B*.
c) A la frecuencia acumulada hasta 1.80 (13 844) se le puede restar la frecuencia acumulada hasta antes de 1.21 m (315) y obtener así el número de habitantes que miden entre 1.21 y 1.80 m, es decir, 1.21 m o más, pero hasta 1.80 m o menos. El resultado es 13 844 – 315 = 13 529 habitantes. Este resultado equivale a sumar la frecuencia de las clases *B*, *C* y *D*.

Aplicación avanzada de las frecuencias acumuladas

A menudo, es necesario calcular, al menos en forma aproximada, cuántos elementos están incluidos en una fracción de una clase. Esto sucede, sobre todo, cuando ya no se tienen los datos que dieron origen a la tabla, o cuando estos son demasiados y no resulta práctico clasificarlos de nuevo con otros límites.

Cuando el número de datos en cada clase es grande, resulta razonable considerar que estos se encuentran uniformemente distribuidos en todos los valores posibles de cada clase. A partir de este concepto es posible determinar, en forma aproximada, el número de elementos incluidos entre los nuevos límites que se definan.

EJEMPLO 20

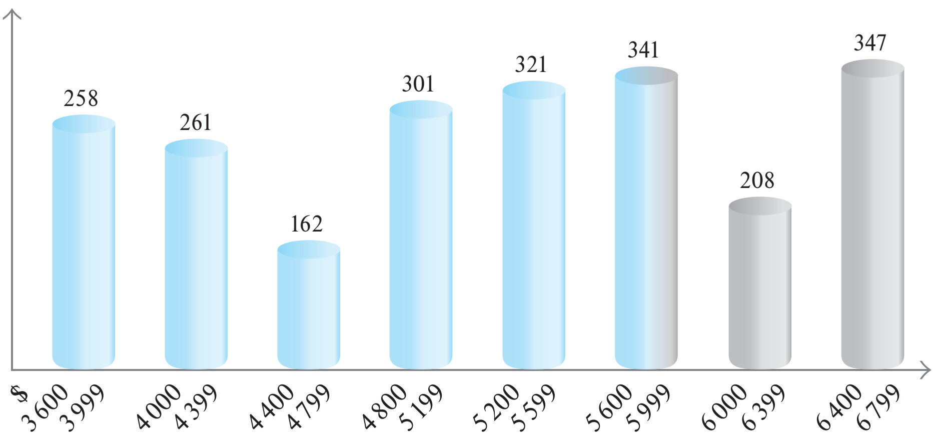
En la tabla siguiente se muestra la distribución de sueldos de una empresa. Determina cuántos empleados ganan al menos $5 950.00.

Supón una distribución uniforme dentro de cada clase, y que los sueldos se tienen solo en pesos enteros, sin centavos.

Clase	Límite inferior $	Límite superior $	Frecuencia absoluta (empleados)	Frecuencia acumulada (empleados)	Frecuencia complementaria (empleados)
1	3 600.00	3 999.00	258	258	1 941
2	4 000.00	4 399.00	261	519	1 680
3	4 400.00	4 799.00	162	681	1 518
4	4 800.00	5 199.00	301	982	1 217
5	5 200.00	5 599.00	321	1 303	896
6	5 600.00	5 999.00	341	1 644	555
7	6 000.00	6 399.00	208	1 852	347
8	6 400.00	6 799.00	347	2 199	0

Solución

¿Cuántos empleados ganan $5 950.00 o más? En la figura se indica:



Si se considera una distribución uniforme de frecuencias en la sexta clase, el área sombreada en esa clase es:

$$x = \frac{\text{Límite superior} - \text{Valor} + \text{Unidad de variación}}{\text{Límite superior} - \text{Límite inferior} + \text{Unidad de variación}} \times \text{Frecuencia de la clase}$$

El total de empleados que ganan $5 950.00 o más es:

$$Nx = \frac{5\,999 - 5\,950 + 1}{5\,999 - 5\,600 + 1} \cdot (341) + 208 + 347$$

$$= 43 + 208 + 347 = 598$$

OLC

En el OLC hallarás otros ejemplos de aplicación avanzada de las frecuencias acumuladas.

Es importante señalar que las cantidades 208 y 347 son la frecuencia absoluta de las clases 7 y 8.

(La parte proporcional del primer rectángulo sombreado incluye los valores \$5 950.00, \$5 960.00, \$5 970.00, \$5 980.00 y \$5 999.00, de un total de 400 valores diferentes que contiene el intervalo; esto es, los valores \$5 600.00, \$5 601.00,... \$5 998.00 y \$5 999.00).

Otra forma de resolver este problema es mediante la fórmula:

$$Nx = \begin{array}{c}\text{Frecuencia complementaria}\\ \text{de la clase}\end{array} + \frac{\begin{array}{c}\text{Límite}\\ \text{superior}\end{array} - x + UV}{\begin{array}{c}\text{Límite}\\ \text{superior}\end{array} - \begin{array}{c}\text{Límite}\\ \text{inferior}\end{array} + UV} \cdot \begin{array}{c}\text{Frecuencia}\\ \text{de la clase}\end{array}$$

donde:

Nx es el número de personas que tienen por lo menos x
x es el valor que se desea, del tipo "al menos x",
UV es la unidad de variación de datos.

En este caso, $x = 5\,950$; la frecuencia complementaria de la clase es 555, la frecuencia de la clase es 341, el límite superior de la clase es 5 999; el límite inferior de la clase es 5 600 y la unidad de variación es 1, de forma que:

$$Nx = 555 + \frac{5\,999 - 5\,950 + 1}{5\,999 - 5\,600 + 1} \cdot 341 = 598 \text{ empleados}$$

Consideraciones adicionales

Es mucho más lo que puede escribirse respecto a las distribuciones de frecuencias. En estas últimas páginas del capítulo se analiza cómo consolidar dos o más clases, cómo redefinir límites al utilizar frecuencias unitarias, y la pérdida de exactitud que resulta cuando se manejan las clases de una distribución de frecuencias en vez de manejar directamente los datos originales.

Consolidación de clases

Cuando se elabora una distribución de frecuencias con un gran número de datos y no se conoce con precisión la amplitud de los límites de clase, conviene que el número de clases sea grande, pues de esta manera pueden consolidarse dos o más clases y se conserva así la exactitud de los datos originales, sin necesidad de procesarlos nuevamente. Considera el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 21

Con base en la tabla que sigue, determina la distribución de frecuencias si los límites fueran 81-90, 91-100 y 101-150.

Clase	Límite inferior	Límite superior	Frecuencia
A	81	85	7
B	86	90	5
C	91	95	9

(*continúa*)

(*continuación*)

Clase	Límite inferior	Límite superior	Frecuencia
D	96	100	4
E	101	110	12
F	111	120	8
G	121	150	7

Solución

El intervalo 81-90 incluye completamente las dos primeras clases, por lo que sus frecuencias deben sumarse para obtener la frecuencia del intervalo, esto es, $7 + 5 = 12$.

El intervalo 91-100 incluye completamente la tercera y cuarta clase, por lo que su frecuencia es $9 + 4 = 13$.

El intervalo 101-150 incluye las últimas tres clases, cuya frecuencia debe sumarse para obtener la frecuencia del intervalo 101-150, es decir, $12 + 8 + 7 = 27$.

Nueva clase	Límite inferior	Límite superior	Clases anteriores	Frecuencia
1	81	90	*A* y *B*	$7 + 5 = 12$
2	91	100	*C* y *D*	$9 + 4 = 13$
3	101	150	*E, F* y *G*	$12 + 8 + 7 = 27$

Frecuencias unitarias

Si se desea modificar los límites de una distribución de frecuencias sin procesar de nuevo los datos originales, y si los límites deseados no coinciden exactamente con los de la distribución de frecuencias, se puede hacer una distribución proporcional de la o las clases que sea necesario afectar, aplicando el concepto de frecuencias unitarias.

La frecuencia unitaria de una clase es el número de elementos que resulta de dividir la frecuencia de la clase entre el ancho exacto de la clase, para determinar así el número de elementos que corresponden a cada unidad del ancho de clase. Este concepto supone la distribución uniforme de un gran número de datos de la clase, y aplica el concepto de proporcionalidad.

EJEMPLO 22

Con base en los datos relativos a una gran población se obtuvo la distribución de frecuencias que se muestra enseguida. Es necesario modificar los límites de clase, pero no es posible procesar de nuevo los datos originales. Determina la distribución aproximada en intervalos de 5 unidades, a partir de 56.

Clase	Límite inferior	Límite superior	Ancho del intervalo	Frecuencia
A	56	62	7	29 673
B	63	73	11	86 075
C	74	77	4	16 136
D	78	85	8	29 464

Solución

La frecuencia unitaria se obtiene con la fórmula:

$$\text{Frecuencia unitaria} = \frac{\text{Frecuencia de clase}}{\text{Intervalo de clase}}$$

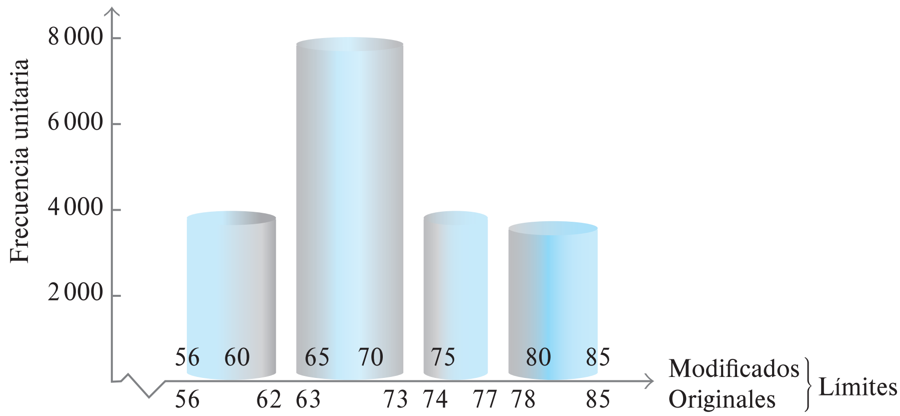
$$\text{Frecuencia unitaria de la clase } A = \frac{29\,673}{7} = 4\,239$$

Esto equivaldría a tener 4 239 elementos en cada uno de los siete valores (56, 57, 58, 59, 60, 61 y 62) que puede tener el intervalo de la clase A.

$$\text{Frecuencia unitaria de la clase } B = \frac{86\,075}{11} = 7\,825$$

$$\text{Frecuencia unitaria de la clase } C = \frac{16\,136}{6} = 4\,034$$

$$\text{Frecuencia unitaria de la clase } D = \frac{29\,464}{8} = 3\,683$$



En la figura anterior se indica la frecuencia unitaria de cada clase y sus límites originales, y se señala cómo debe calcularse la frecuencia de los nuevos límites; por ejemplo, la primera nueva clase tiene un ancho de 5 unidades, y a cada una de ellas corresponde una frecuencia unitaria de 4 239, por lo que su frecuencia será 21 195, mientras que la segunda clase tiene 2 unidades de ancho de la primera clase y 3 de la segunda clase.

Las nuevas clases se definirán de la manera siguiente:

Límites	**Intervalo**	**Frecuencia**
50-60	5	$4\,239 \cdot 5 = 21\,195$
61-65	5	$4\,239 \cdot 2 + 7\,825 \cdot 3 = 31\,953$
66-70	5	$7\,825 \cdot 5 = 39\,125$
71-75	5	$7\,825 \cdot 3 + 4\,034 \cdot 2 = 31\,543$
76-80	5	$4\,034 \cdot 2 + 3\,683 \cdot 3 = 19\,117$
81-85	5	$3\,683 \cdot 5 = 18\,415$

¿Te acuerdas...

de las operaciones reversibles y operaciones irreversibles mencionadas en el capítulo 1? ¿Qué caso es este?

Consecuencias de la agrupación de los datos

Cuando se aplica el concepto de frecuencias unitarias para redefinir los límites de una distribución de frecuencias, en la mayoría de los casos se pierde un poco la exactitud respecto a los datos originales, porque la distribución uniforme de los datos en todos los valores posibles de una clase es un supuesto con valor estadístico, pero no se cumple con precisión matemática. Esto se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 23

Con base en los datos indicados abajo:

a) Determina la distribución de frecuencias utilizando los límites 56-60, 61-75, 76-85 y 86-90.
b) Aplica el concepto de frecuencias unitarias para obtener la distribución aproximada, a partir de 56, en intervalos uniformes de tamaño 5.
c) Determina la distribución de frecuencias utilizando intervalos uniformes de tamaño 5, a partir de 56.

Los datos son los siguientes:

74, 83, 73, 56, 64, 65, 59, 75, 86, 66, 61, 64, 83, 61, 89, 77, 58, 84, 78, 72, 68, 76, 57, 58, 85, 87, 68, 80, 82, 85

Solución

a) La distribución con los límites señalados es:

Clase	Límites	Frecuencia	
A	56-60	𝍸	5
B	61-75	𝍸 𝍸 ||	12
C	76-85	𝍸 𝍸	10
D	86-90	|||	3

b) La fórmula para calcular la frecuencia unitaria es:

$$\text{Frecuencia unitaria} = \frac{\text{Frecuencia de clase}}{\text{Intervalo de clase}}$$

Al sustituir valores queda:

Frecuencia unitaria de la clase $A = \frac{5}{5} = 1.00$

Frecuencia unitaria de la clase $B = \frac{12}{15} = 0.80$

Frecuencia unitaria de la clase $C = \frac{10}{10} = 1.00$

Frecuencia unitaria de la clase $D = \frac{3}{5} = 0.60$

Las nuevas clases se definirán como sigue:

Límites	Intervalo	Frecuencia	
56-60	5	(1.00)5	5
61-65	5	(0.80)5	4
66-70	5	(0.80)5	4
71-75	5	(0.80)5	4
76-80	5	(1.00)5	5
81-85	5	(1.00)5	5
86-90	5	(0.60)5	3

c) La distribución de frecuencias con los límites del inciso *a*), a partir de los datos originales:

Límites	Frecuencias	
56-60	~~||||~~	5
61-65	~~||||~~	5
66-70	|||	3
71-75	||||	4
76-80	||||	4
81-85	~~||||~~ |	6
86-90	|||	3

Observa la diferencia que hay entre los resultados del inciso *b*) y los del inciso *c*), por lo que se confirma que a partir de los datos originales puede determinarse con exactitud cualquier distribución de frecuencias; sin embargo, a partir de una distribución de frecuencias solo es posible rehacer otros límites con resultados aproximados.

EJERCICIOS COLABORATIVOS

1. Con base en las cifras del año anterior, determina cuántos países exportan a México entre 1 000 y 30 000, entre 30 001 y 50 000, y más de 50 000 millones de dólares al año. La información puede obtenerse en: www.bancomext.com
2. Obtén 15 nombres (sin apellidos) de tus compañeros de clase y prepara una tabla de frecuencias con límite superior, límite inferior y frecuencia con base en el número de letras de cada nombre. Compara los resultados obtenidos por otros compañeros de clase.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Del análisis de resistencia de 25 bloques de concreto se obtuvieron los resultados que se indican a continuación. Prepara una distribución de frecuencia de cuatro clases de tamaño uniforme y determina la clase más abundante:

   23.1, 64.9, 48.3, 72.8, 42.9, 37.7, 43.6, 26.4, 68.4, 52.3, 29.4, 70.4, 62.8, 60.4, 58.9, 39.4, 35.1, 58.2, 48.4, 22.7, 26.3, 30.5, 29.8, 68.1, 52.9

2. En un concurso de salto de longitud se presentaron 30 participantes, quienes obtuvieron las marcas que se presentan enseguida, en centímetros. Clasifica los valores en cinco clases de tamaños uniformes y compara los resultados con competencias similares realizadas en fecha reciente:

   671, 946, 912, 876, 690, 489, 734, 567, 754, 612, 564, 765, 845, 723, 594, 812, 835, 501, 934, 751, 791, 672, 795, 855, 745, 574, 765, 499, 718, 911

3. La duración, en horas, de 20 baterías eléctricas se muestra enseguida. Prepara una distribución de frecuencias con cuatro clases de tamaño uniforme. ¿Cuán razonable sería pensar que la duración de las baterías es, por lo general, mayor de 125 horas?:

   145, 105, 190, 155, 75, 90, 135, 110, 120, 185, 120, 165, 150, 160, 175, 140, 155, 175, 125, 170

4. Determina los límites exactos, las marcas de clase y la frecuencia relativa, y grafica el histograma de cada una de las tablas de distribución de frecuencias siguientes:

Tabla A

Límite inferior	Límite superior	Frecuencia
37.7	50.2	23
50.3	62.8	19
62.9	75.4	22
75.5	88.0	21

Tabla B

Límite inferior	Límite superior	Frecuencia
504	595	21
596	687	19
688	779	22
780	871	23
872	963	20

Tabla C

Límite inferior	Límite superior	Frecuencia
90	115	17
120	145	20
150	175	22
180	205	21

5. Traza una gráfica de barras de dos variables para presentar la información de cada una de las tablas siguientes.

Tabla A

Región	Caribe	Centro	Norte	Sur
Estatura (m)	1.62	1.65	1.70	1.61
Peso (kg)	61	59	65	59

Tabla B

Cable de acero	Marca 1	Marca 2	Marca 3	Marca 4	Marca 5
Costo ($/m)	16.40	23.95	21.65	19.30	21.15
Resistencia (kg)	135	182	165	158	169

6. Determina y grafica las frecuencias acumuladas y complementarias de las tablas de frecuencias siguientes.

Tabla A

Límite inferior exacto	Límite superior exacto	Frecuencia
37.65	50.25	23
50.25	62.85	19
62.85	75.45	22
75.45	88.05	21

Tabla B

Límite inferior exacto	Límite superior exacto	Frecuencia
503.5	595.5	21
595.5	687.5	19
687.5	779.5	22
779.5	871.5	23
871.5	963.5	20

Tabla C

Límite inferior exacto	Límite superior exacto	Frecuencia
87.5	117.5	17
117.5	147.5	20
147.5	177.5	22
177.5	207.5	21

7. Elabora una gráfica de pastel para cada una de las tablas de distribución de frecuencias siguientes.

Tabla A

Clase	Frecuencia	Clase	Frecuencia
A	23	*C*	22
B	19	*D*	21

Tabla B

Clase	Frecuencia	Clase	Frecuencia
1	21	4	23
2	19	5	20
3	22		

Tabla C

Clase	Frecuencia
X	17
Y	20
Z	22
W	21

8. Con base en los datos de la tabla presentada a continuación, correspondientes al peso en gramos (g) de las naranjas cosechadas en una huerta, determina la frecuencia absoluta:

a) De 160 g en adelante
b) De 235 g hacia abajo
c) Entre 170 g y 240 g

Clase	Límite inferior (g)	Límite superior (g)	Frecuencia absoluta (naranjas)	Frecuencia acumulada (naranjas)	Frecuencia complementaria (naranjas)
1	115	145	6245	6 245	28 789
2	150	180	7 264	13 509	22 525
3	185	215	11 450	24 959	11 075
4	220	250	2 923	27 882	8 152
5	255	285	8 152	36 034	0

9. Con base en los datos de la tabla siguiente, determina la frecuencia absoluta si los límites fueran de 155 a 180; de 185 a 215, y de 220 a 258 gramos.

Clase	Límite inferior (g)	Límite superior (g)	Frecuencia absoluta (naranjas)
1	115	145	6 245
2	150	180	7 264
3	185	215	11 450
4	220	250	2 923
5	255	285	8 152

10. Con base en los datos de la tabla siguiente, determina la frecuencia absoluta si los límites fueran de 115 a 155; de 160 a 270, y de 275 a 285 gramos.

Clase	Límite inferior (g)	Límite superior (g)	Frecuencia absoluta (naranjas)
1	115	145	6 245
2	150	180	7 264
3	185	215	11 450
4	220	250	2 923
5	255	285	8 152

11. Un auditor analizó las facturas de una empresa y presentó los datos en la tabla siguiente. Determina aproximadamente cuántas facturas se elaboraron:

a) Entre \$100.00 y \$250.00
b) Entre \$300.00 y \$499.99

Monto (\$)	Número de facturas
Menos de 80.00	7 495
De 80.00 a 199.00	4 128
De 200.00 a 349.99	2 716
De 350.00 a 499.99	3 264
De 500.00 o más	1 922

12. La vida útil de una muestra de las llantas usadas por una empresa de transporte, expresada en miles de kilómetros (km), es la siguiente:

62, 53, 46, 51, 58, 47, 47, 54, 50, 48, 61, 48, 56, 48, 45, 52, 60, 52, 49

Prepara una distribución de frecuencias de cuatro clases iguales, empezando en 45. ¿Consideras que la concentración de datos en la primera clase indica una vida útil corta, o será que la muestra era muy pequeña?